

Parameterized Quantum Circuit 설계를 위한 Qubit 궤적 분석

오승철, 임채문, 김대연, 김중현
고려대학교

{seungoh, anscodla0314, dk725, joongheon}@korea.ac.kr

Understanding the Qubit Trajectory in Parameterized Quantum Circuits

Seungcheol Oh, Chaemoon Im, Daeyeun Kim, Joongheon Kim
Korea University

요약

양자 신경망(QNN)은 파라미터화된 양자회로(PQC)를 통해 고전 데이터를 출력으로 매핑한다. 특히 데이터 리업로딩 구조를 가진 단일 큐비트 PQC는 출력이 푸리에 전개로 해석되어 단변수 함수 근사가 가능하다. 그러나 기존 연구는 표현 가능한 주파수 범위에 초점을 맞추어, 회로 구성 요소가 푸리에 계수를 어떻게 형성·조절하는지에 대한 구조적 이해는 부족했다. 본 논문은 단일 큐비트 상태 변화를 블로흐 구상의 출력 궤적으로 해석하여, 궤적의 반지름·방향·위치가 각각 푸리에 계수의 크기·위상·오프셋에 대응됨을 보인다. 또한 리업로딩 층 수를 늘리는 대신, 학습 가능한 스케일러를 데이터 인코딩에 도입해 회로가 목표 주파수 스펙트럼에 맞게 주파수 축을 자동으로 조정하도록 하는 설계 원리를 제안한다.

I. 서론

양자컴퓨팅은 중첩과 얽힘 같은 양자역학적 자원을 활용해 특정 문제에서 고전 계산을 뛰어넘을 잠재력을 가진다 [1,2]. 다만 이러한 이점은 양자이기 때문에 자동으로 얻어지는 것이 아니라, 주어진 문제의 구조에 맞는 알고리즘과 회로를 설계할 때 비로소 실현된다. 따라서 양자 기계학습에서도 성능을 높이기 위해서는, 단순히 더 깊은 회로를 쓰기보다 Parameterized Quantum Circuit (PQC)가 어떤 방식으로 함수를 표현하고 학습하는지를 이해하는 것이 중요하다 [3].

최근 PQC 기반 모델은 고전 데이터가 수행하던 분류와 근사 문제에 적용되며 많은 관심을 받아왔다. 특히 데이터 리업로딩 구조는 PQC 출력을 푸리에 급수 형태로 해석할 수 있게 하여, 접근 가능한 주파수 성분 집합이 데이터 인코딩 해밀토니안과 리업로딩 회수에 의해 결정된다는 중요한 이론을 제공했다 [4]. 그러나 실제 학습에서는 목표 함수의 푸리에 계수를 사전에 알 수 없으므로, 표현 가능한 주파수 집합을 안다고 해서 곧바로 학습이 잘 되는 것은 아니다. 핵심은 학습 가능한 파라미터들이 어떻게 출력의 푸리에 계수들을 직접 만들어내는가이다 [5].

본 논문은 이 질문에 답하기 위해 PQC의 동작을 블로흐 구 위의 궤적 관점에서 해석한다. 구체적으로, (i) 최소 구성 회로들을 통해 진폭·위상·오프셋이 궤적으로 어떻게 나타나는지 단계적으로 보이고, (ii) 일반적인 단일-큐비트 PQC에서 푸리에 계수가 기하학적 요소로 완전히 결정됨을 정리하며, (iii) 실용적 설계를 위해 데이터 인코더에 학습 가능한 스케일러를 도입하여 목표 주파수 스펙트럼에 맞춘 주파수 조절형 인코딩을 제안하고 실험으로 검증한다.

II. 본론

본 논문은 단일 큐비트 PQC의 출력을 측정축으로의 투영값이라는 기하학적 관점에서 재해석한다. 즉, 회로를 통과한 뒤 얻는 예측값은 어떤 복잡한 계산 결과라기보다, 블로흐 구 위에서 상태가 그리는 궤적을 특정 측정축에서 바라본 값으로 이해할 수 있다. 이 관점을 취하면, PQC가 출력으로 만들어내는 사인/코사인 성분이나 평균값, 진폭의 크기 변화가 모두 궤적의 모양과 위치 변화로 직관적으로 대응된다. 따라서 학습은 곧 블로

흐 구 위에서 상태가 움직이는 경로를 원하는 형태로 조정하는 과정이며, 측정은 그 경로를 한 축으로 투영해 신호로 읽어내는 과정으로 정리된다. 데이터 리업로딩(data re-uploading) 구조는 데이터 인코딩 게이트와 학습 가능한 유니터리 블록이 번갈아 반복되는 형태를 갖는다. 기존 이론들은 이 반복 구조가 어떤 주파수 성분까지 표현 가능한가를 결정한다는 점을 강조해 왔다. 즉, 데이터 인코딩에 사용되는 연산자의 스펙트럼 구조와 리업로딩 회수가 접근 가능한 주파수 집합을 제한하고, 층을 늘리면 그 집합이 확장된다는 것이다. 그러나 실제 학습에서 더 중요한 질문은 따로 있다. 주파수 성분이 가능하다는 사실만으로는 충분하지 않고, 학습 가능한 파라미터가 그 주파수 성분들의 계수를 목표 함수에 맞게 제대로 조절할 수 있어야 한다. 본 논문은 이 계수 형성 메커니즘을 궤적 관점에서 구체적으로 보여주며, 표현 가능한 주파수의 존재와 계수 학습의 구체적 작동 원리를 분리해 설명한다.

이를 위해 우리는 매우 단순한 회로 구성에서 출발해, 진폭(amplitude)·위상(phase)·오프셋(offset)이 각각 블로흐 구 궤적의 어떤 특징에 대응되는지 단계적으로 추적한다. 먼저 데이터 인코딩만으로도 상태는 블로흐 구 위에서 원 형태의 경로를 그리며, 측정축으로 투영하면 기본적인 주기적 성분이 나타난다. 그 다음 학습 가능한 회전을 추가하면, 궤적의 시작점과 진행 방향이 바뀌면서 출력의 위상이 이동한다. 더 나아가 다른 축 방향의 회전이 도입되면 궤적이 적도면에서 기울어지거나 유효 반지름이 달라지며, 그 결과 출력의 진폭이 조절된다. 마지막으로, 궤적이 특정 반구에 더 오래 머물도록 위치가 이동하면 투영값의 평균이 변하고, 이는 곧 오프셋의 학습으로 해석된다. 요약하면, 위상은 궤적의 시작점/방향 변화로, 진폭은 궤적의 크기 변화로, 오프셋은 궤적이 측정축 방향으로 얼마나 편향되었는지로 이해할 수 있다.

이러한 직관을 일반적인 형태로 끌어올리기 위해, 본 논문은 단일 큐비트에서 데이터 인코딩이 특정 축을 기준으로 회전을 유도하는 경우 상태가 본질적으로 원형 궤적을 따른다는 점에 주목한다. 학습 가능한 유니터리는 이 원형 궤적을 다른 방향으로 회전시키거나 기울여 놓고, 측정은 그 결과를 한 축으로 투영해 읽는다. 이 과정의 귀결로 출력은 상수항 + 사인 성분 + 코사인 성분의 결합 형태로 정리되며, 각 성분의 계수는 오직 기하학적 요소들 초기 상태, 데이터 인코딩 축, 학습 회전이 만들어내는 상태

방향, 측정축의 관계로 결정된다. 중요한 점은, 이 결론이 단순히 푸리에 급수로 표현된다는 일반론이 아니라, 학습 파라미터가 출력 계수를 바꾸는 방식이 결국 궤적의 반지름과 방향을 바꾸는 회전 기하학으로 환원된다는 구체적인 설명을 제공한다는 것이다. 따라서 회로 설계는 파라미터 수를 늘리는 문제라기보다, 원하는 계수 구조를 만들 수 있는 궤적을 생성하도록 회전 블록과 측정축 관계를 배치하는 문제로 재정의된다.

실용적 관점에서 본 논문은 또 하나의 핵심 제안을 한다. 목표 함수에 높은 주파수 성분이 포함될수록 기존 방식은 리업로딩 층을 늘려 접근 가능한 주파수 범위를 확장하려 했다. 그러나 이는 회로 깊이를 빠르게 증가시켜 NISQ 환경에서 실행 비용과 노이즈 취약성을 키운다. 이에 대한 대안으로, 저자들은 데이터 인코딩 단계에 학습 가능한 스케일러(scaler)를 도입한다. 직관적으로 이는 입력을 회로에 그대로 주입하는 대신, 회로가 학습을 통해 입력의 유효 스케일을 조정하여 결과적으로 출력의 주기 구조(주파수 축)를 맞추도록 하는 방법이다. 층마다 다른 스케일러를 허용하면 제한된 리업로딩 깊이에서도 여러 주파수 성분을 효과적으로 포착할 수 있어, 깊이를 늘려서 주파수를 확보하던 전략을 인코딩을 학습시켜 주파수를 정렬하는 전략으로 전환할 수 있다.

III. 실험결과

시뮬레이션 기반 실험을 통해 제안한 해석과 설계가 실제 학습에서 유효함을 검증한다. 궤적 기반 해석이 예측하는 진폭·위상·오프셋의 변화가 학습 결과와 일관되게 관찰되며, 특히 스케일러가 학습 과정에서 특정 값으로 수렴하면서 목표 함수가 요구하는 주기 구조에 맞춰 출력이 정렬되는 현상이 확인된다. 여러 주파수 성분이 혼재된 목표에서도 리업로딩을 과도하게 늘리지 않고 손실이 안정적으로 감소하고 근사 품질이 개선되는 결과는, 스케일러가 단지 이론적 장치가 아니라 실제 학습을 돕는 “구조적 레버”로 작동함을 뒷받침한다. 결과적으로 본 논문은 단일 큐비트 PQC의 학습을 블로흐 구 위 궤적의 조형 문제로 해석함으로써, 표현력 분석을 넘어 학습 메커니즘까지 연결하는 설계 지침을 제시한다.

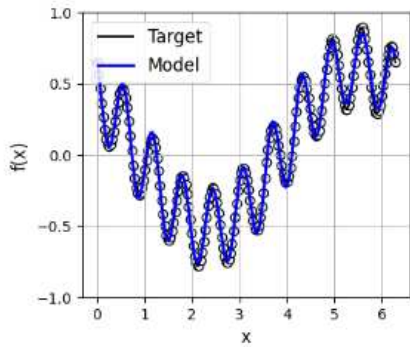


그림 1. 타겟 함수

위 그림은 목표 함수와 학습된 모델 출력(Model)을 비교한 결과로, 구간 전반에서 두 곡선이 거의 겹치듯 따라가고 있다. 특히 작은 진동과 큰 추세가 함께 섞인 형태인데도, 모델이 국소적인 굴곡까지 잘 재현한다는 점에서 PQC가 해당 타겟의 스펙트럼 구조를 충분히 학습했음을 보여준다. 이는 학습 가능한 스케일(scale) 파라미터의 학습 과정을 나타내며, 초기에는 큰 값에서 시작해 빠르게 감소한 뒤 약 1 근방으로 안정적으로 수렴한다. 이는 학습 초기에 스케일이 타겟 주파수에 맞는 유효 입력 스케일을 탐색하다가, 최적 주파수 정렬이 이뤄지면 큰 변화 없이 작은 진동만 남는

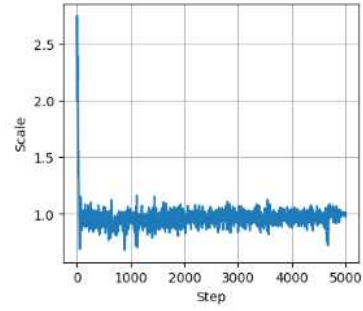


그림 2. 학습된 스케일러

형태로 안정적으로 수렴했음을 의미한다. 즉, 모델 출력이 타겟을 잘 맞추는 동시에 스케일 파라미터도 안정화되므로, 제안한 스케일러 기반 인코딩이 학습 과정에서 실제로 주파수 정렬 역할을 수행했다는 것을 뒷받침합니다.

IV. 결론

본 논문은 데이터 리업로딩 PQC를 부분 푸리에 급수로 표현 가능이라는 기존 결과에서 한 걸음 더 나아가, 학습 가능한 파라미터들이 푸리에 계수를 어떻게 형성·조절하는지를 블로흐 구 위의 출력 궤적 관점에서 설명했다. 최소 회로 분석을 통해 진폭·위상·오프셋이 각각 궤적의 반지름·방향·위치 변화로 대응됨을 보였고, 일반화된 정리를 통해 푸리에 계수가 기하학적 요소들로 완전히 결정된다는 점을 정리했다. 또한 실용적 설계로서 데이터 인코딩에 학습 가능한 스케일러를 도입해, 얇은 회로에서도 목표 주파수 스펙트럼을 맞추는 전략을 제안하고 실험으로 검증했다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2024년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임(RS-2024-00439803, SW컴퓨팅산업 원천기술개발사업 (SW스타랩)); 이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(RS-2025-00561377). 본 논문의 교신저자는 김중현임.

참 고 문 헌

- [1] Deutsch D. and Jozsa R. “Rapid solution of problems by quantum computation,” *Proc. Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 439, p. 553, 1992.
- [2] Grover L. K. “A fast quantum mechanical algorithm for database search,” in *Proc. ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)* (Philadelphia, PA, USA, 1996), pp. 212–219.
- [3] Schuld, M., Kloran, N. “Is quantum advantage the right goal for quantum machine learning?” *Prx Quantum*, vol. 3, no. 3, p. 030101, 2022.
- [4] Schuld M., Sweke R., and Meyer J.J. “Effect of data encoding on the expressive power of variational quantum machine learning models,” *Physical Review A*, vol. 103, no. 3, p. 032430, 2021.
- [5] Yu Z., Yao H., Li M., and Wang X. “Power and limitations of single-qubit native quantum neural networks,” *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 35, pp. 27810–27823, 2022.