

대칭 정보 완비 POVM classical shadow 를 활용한 양자 오류 완화 기법 설계

오현수, 민건식, 허준*
고려대학교, *고려대학교

pypaul@korea.ac.kr, mgs3351@korea.ac.kr *junheo@korea.ac.kr

Design of quantum error mitigation with Symmetry Informationally Complete POVM classical shadow

Hyun Su Oh, Gunsik Min, Jun Heo*
Korea Univ., *Korea Univ.

요 약

본 논문은 classical shadow 의 랜덤 유니터리 측정자를 정사면체 POVM 으로 구현하고 이를 양자 오류 완화 기법인 probabilistic error cancellation(PEC)을 통해 NISQ 환경에서 적용할 수 있도록 기법을 설계하였다. Classical shadow 와 PEC 기법의 최소 측정 수를 분석하고 두 기법을 결합했을 때 필요한 요구 조건을 수학적으로 분석하였다. 또한, SIC-POVM 을 활용한 classical shadow, 오류 환경에서 기존의 classical shadow 보다 오류 완화 기법을 같이 적용했을 때의 결과값 성능이 좋아지는 것을 시뮬레이션을 통하여 확인했다.

I. 서 론

양자 하드웨어의 발전은 디지털컴퓨터가 해결하지 못하는 문제들을 대응하기 위하여 여러 연구가 진행되었지만 여전히 noisy intermediate scale quantum(NISQ) 환경에 머물러 있어서 많은 양자 정보를 측정하는데 있어서 어려움이 있다[1,2].

이러한 환경속에서 최근 양자 정보 처리의 발전으로 인해 다양한 단계에서 준비된 양자 상태를 특성화하는 작업이 자주 요구된다. 이로 인하여 양자 상태의 밀도 행렬을 동일한 상태의 앙상블에 대해 측정하여 복원하는 문제인 양자 상태 단층촬영(quantum state tomography)에 대한 관심이 증가하고 있다. Classical Shadow 는 이러한 문제를 해결하고자 고안된 방법으로 $O(n)$ 개의 밀도 행렬 ρ 복사본만으로 n 개의 큐비트 수에 대한 거듭제곱 함수 수준의 많은 관측량을 예측할 수 있게 한다[3,4].

II. 본론

A. Probabilistic Error Cancellation

PEC 는 오류 측정 결과값을 선형적으로 조합하여 오류를 완화한 결과값을 추정하는 양자 오류 완화 기법이다[2].

다음 세 가지 과정을 통해 PEC 는 양자 상태의 오류를 완화 시킨다. 첫 번째로, 환경의 노이즈 채널을 추정한다. 이상적인 상태를 G , 이 게이트에 발생하는 오류를 ϵ 이라 하자. 두 번째로, 오류의 역채널의 quasi-probability 로 다음과 같이 분해한다.

$$G = \sum_i \gamma_i \epsilon_i, \quad \sum_i |\gamma_i| = \Gamma \quad (1)$$

마지막으로, 각 확률에 따라 오류를 샘플링하여 회로를 observable O 로 측정한다.

$$Tr[O \cdot G(\rho)] = \sum_i \Gamma \cdot p_i \cdot sgn(\gamma_i) \cdot Tr[O \cdot \epsilon_i(\rho)] \quad (2)$$

B. Classical Shadow

Quantum Classical Shadow 는 양자 상태의 추정과 양자 특성 분석에 매우 효율적으로 사용되는 기법이다. 양자 역 유니터리 연산을 시행한 양자 앙상블을 만드는 것으로 전체 양자 상태를 완전히 재구성하는 대신에 많은 양자 관측량을 적은 수의 측정으로 예측할 수 있다.

Classical Shadow 는 다음의 과정을 거쳐서 양자 상태의 특성을 예측한다[3].

- 1) 랜덤 유니터리 $u = \{U_1, U_2, \dots\}$ 에서 무작위 연산 적용
- 2) Observable 에 따라 N_s 수 만큼 측정
- 3) 측정 비트에 적용된 유니터리의 역변환을 적용하여 Classical Snapshot 생성
- 4) 생성된 Classical Snapshot 앙상블로 다음과 같이 Classical Shadow $S(\rho, N_s)$ 생성

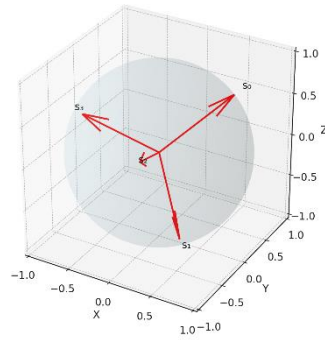
$$S(\rho, N_s) = \{\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_{N_s}\} \quad (3)$$

위의 4)번 과정을 통해서 얻은 Classical Shadow 에다가 적절한 알고리즘을 적용하여 우리가 원하는 양자 상태의 특성을 파악할 수 있다.

C. Symmetric Informationally Complete POVM

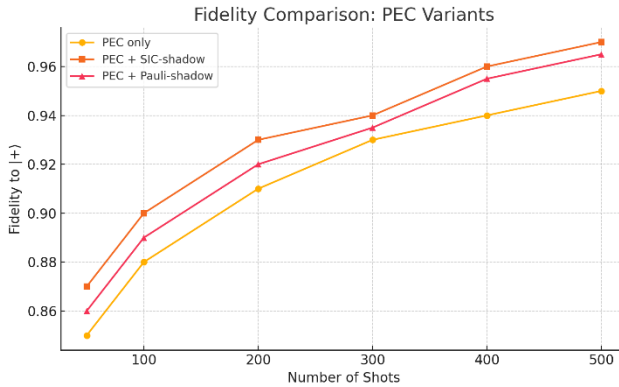
양자 측정을 수행하려면 양의 연산자값 측정(POVM) 집합을 지정해야 한다. 양자 상태를 측정했을 때 관측 가능한 물리량 O 를 $O = \sum_a a M_a$ 로 스펙트럼 분해를 할 수 있는데, 여기서 M_a 는 고유값 a 에 대응하는 투영 연산자이며 POVM은 이러한 연산자들의 집합을 일반화한 개념이다. 여기에서 Symmetric Informationally Complete(SIC) POVM은 M_a 의 집합이 완비성, 대칭성, pure 상태인 POVM을 의미하며, 1 큐비트 상태에서의 SIC-POVM은 $M_{tetra} = \{M_a = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + s_a \cdot \sigma)\}_{a \in \{0,1,2,3\}}$ 으로 정의할 수 있다. 이때, 각 s_i 들은 블로흐 구면 위에서 다음과 같이 $s_0 = (0,0,1)$, $s_1 = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3})$, $s_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$, $s_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ 로 정의된다[4,5].

1-Qubit SIC-POVM Vectors on Bloch Sphere



[그림 1] 단일 큐비트 상태에서의 SIC-POVM 인 Tetrahedral POVM을 블로흐 구면 위에서 표현한 그림

D. 시뮬레이션



[그림 2] 세 기법 PEC, PEC+SIC-POVM, PEC+Classical Shadow를 비교한 그림. Bit flip noise 오류 환경에서 각각 50, 100, 200, 300, 400, 500 회 측정했을 경우에 $|+\rangle$ 상태와의 fidelity를 비교함.

위의 [그림 2]과 같이 Python의 Qiskit을 활용하여 PEC, PEC+SIC-POVM, PEC+Classical shadow이 세가지 기법을 비교하는 시뮬레이션을 진행하였다. PEC+Classical Shadow 기법은 게이트에 X 오류가 발생했음을 가정한 상태에서 샘플링한 집합을 Classical Shadow로 만들어 평균을 취해주어 상태를 복원하였고, PEC+SIC-POVM은 B의 1) 과정에서 파울리 게이트를 적용한 기존 Classical Shadow와 다르게 Tetrahedral POVM을 적용하여 수행하였다.

PEC만 진행했을 때는 fidelity가 [0.85, 0.88, 0.91, 0.93, 0.94, 0.95]로 나왔고 PEC shadow에서의 fidelity는 [0.87, 0.90, 0.93, 0.94, 0.96, 0.97]로 나왔으며 마지막으로 PEC에 SIC shadow를 적용했을 때의 fidelity는 [0.86, 0.89, 0.92, 0.935, 0.955, 0.965]로 전부 측정수가 증가할수록 오류 완화 성능이 좋아졌다. 또한, SIC-POVM 기반 PEC 기법이 기존의 Classical shadow보다 더 높은 성능을 보이는 것을 확인할 수 있다.

III. 결론

SIC-POVM을 사용하여 Classical Shadow의 유니터리 연산에 변형을 가해주면 기존의 오류 완화 기법의 성능을 향상시킬 수 있음을 확인하였다. 이 연구에서는 1 큐비트 측정자만을 사용하였으며 여러 observable들을 사용하지 않았지만 Classical Shadow가 강점을 보이는 많은 관측량을 예측할 수 있는 환경에서도 PEC shadow하고 PEC+SIC-POVM의 성능을 비교하는 것도 차후 연구주제가 될 수 있다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2025년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원 의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. RS-2023-00225385, NISQ 환경에서 저부하, 고효율 양자 오류 경감 기술 개발 및 응용)

참고 문헌

- [1] Acharya, Atithi, Siddhartha Saha, and Anirvan M. Sengupta. "Shadow tomography based on informationally complete positive operator-valued measure." *Physical Review A* 104.5 (2021): 052418. [2] Bonet-Monroig, Xavi, et al. "Low-cost error mitigation by symmetry verification." *Physical Review A* 98.6 (2018): 062339.
- [2] Van Den Berg, E., Mineev, Z. K., Kandala, A., & Temme, K. (2023). Probabilistic error cancellation with sparse Pauli-Lindblad models on noisy quantum processors. *Nature physics*, 19(8), 1116-1121. [4] Kandala, A., Temme, K., Córcoles, A. D., Mezzacapo, A., Chow, J. M., & Gambetta, J. M. (2019). Error mitigation extends the computational reach of a noisy quantum processor. *Nature*, 567(7749), 491-495.
- [3] Nguyen, H. Chau, et al. "Optimizing shadow tomography with generalized measurements." *Physical Review Letters* 129.22 (2022): 220502.
- [4] Mangini, Stefano, Lorenzo Maccone, and Chiara Macchiavello. "Qubit noise deconvolution." *EPJ Quantum Technology* 9.1 (2022): 1-30.
- [5] Jnane, Hamza, et al. "Quantum error mitigated classical shadows." *PRX Quantum* 5.1 (2024): 010324.