Kolmogorov-Arnold Networks를 활용한 페이딩 채널 확률 분포 모델링

공진우
한성대학교
jinugong@hansung.kr

Probability Distribution Modeling of Fading Channels Using Kolmogorov-Arnold Networks

Jinu Gong
Hansung Univ.

요 약

본 논문은 Kolmogorov-Arnold Networks(KAN)의 해석 가능성을 활용해 Rayleigh·Nakagami-m 등 대표적 페이딩 채널의 SNR 확률 분포를 근사하고, 학습이 완료된 모델로부터 KAN의 심볼릭 수식을 자동 추출하는 기능을 통해 확률 분포에 대한 수식 근사 방법을 제안한다. 우선 KAN이 B-spline 기반의 함수 근사가 가능한 점을 활용하여 각 페이딩 채널의 확률 분포함수를 근사하였으며, 이때 (i) 로그함수를 통해 확률 분포함수의 양수 보장, (ii) 적분값 정규화를 위한 페널티 항을 추가해 확률 분포의 제약조건을 만족시켰다. Rayleigh와 Nakagami-m 실험을 통해 KAN 자체의 확률분포함수에 대한 근사 능력은 확인하였으나, 네트워크 구조와 symbolic 함수에 따라 심볼화 단계에서 오차 발생 가능성을 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

이동통신 시스템의 성능을 정확하게 예측·설계 하기 위해서는 채널의 확률적인 특성을 정확하게 모델링해야 한다. 특히 다중경로 페이딩 환경에서는 수신 신호 대 잡음비의 확률 밀도 함수에 대한 모델링이 중요하며, 실제 환경에서는 Rayleigh, Rician, Nakagami-m, two-wave with diffused power (TWDP) [1] 등 다양한 페이딩 모델링을 하고 있으며, 채널 근사 대한 정확도를 더 높이기 위해 더 복잡한 모델들이 계속해서 연구되고 있다. 이를 통해, 해당 환경에서의 통신 용량, 에너지 효율, 물리계층 보안 등에 성능 지표를 해석적으로 분석할 수 있게 된다. 하지만, 단순히 복잡도만을 올려서 채널을 묘사하게 되면, 원래 모델링을 하는 목적인 시스템의 성능 파악을 하는 데 있어서 어려움이 생기게 되고, 적절한 복잡도와 모델링 오류율 사이 선택이 필요하게 된다.

최근 들어 고전적인 모델링이 아닌 머신러닝 기반의 채널 모델링 시도들이 늘어나고 있고, 신경망을 통해 채널 분포에 대한 파라미터를 구하거나 [2], Generative Adversarial Network (GAN) 또는 Variational autoencoder (VAE)등의 생성형 모델을 통해 모사한 특성을 가진 채널을 재생성[3] 해내는 연구들이 진행되고 있다. 하지만, 파라미터를 구하기 위해서는 채널이 어떤 분포군에 들어가는지를 알아야 하고, 회귀모델이나 생성형 모델 기반의 채널 분포 근사 또는 생성의 경우 실제 분포의 수식은 블랙박스 형태로 해석이 불가능 하다. 이러한 기존 머신러닝 모델, 즉, multi-layer perceptron (MLP)의 단점을 보완하기 위해, 최근 제안된 Kolmogorov-Arnold Networks (KAN) [4] 모델이 소개되었다. KAN은 Kolmogorov-Arnold representation theorem을 활용해 임의의 다변수 함수를 1차원 함수들의 합성으로 표현하고, 각 함수를 B-spline 형태로 근사할 수 있다. 또한, 학습이 완료되면 심볼릭한 수식을 자동으로 추출할 수 있어, 복잡한 신경망 모델임에도 불구하고, 해석 가능성을 보일 수 있으며, 이를 통해 본 논문에서는 페이딩 채널의 수신 신호 대 잡음비 확률 밀도 함수를 근사하고자 한다.

Ⅱ. 본 론

KAN의 근간이 되는 Kolmogorov-Arnold representation theorem은 임의의 다변수 연속함수를 제한된 구간에서 유한한 연속 단변수 함수들의 composition 과 addition만으로 표현할 수 있음을 의미한다. 이를 기반으로 하여 KAN에서는 각 단변수 함수들을 B-spline curve를 통해 표현하며, 이를 학습할 수 있는 파라미터를 통해 각 B-spline 기저의 가중 합으로 구성하고, 이때 spline의 차수 k와 grid의 개수 G에 따라 더해지는 basis의 개수가 정해진다. 마지막으로 여러 노드와 레이어를 쌓음을 통해 addition과 composition을 구현한다. 이를 통해 함수를 근사하게 되면, 이론적으로 그리드 개수가 늘어남에 따라 근사 오차가 0에 가까워진다.

근사가 마무리되면, interpretability를 위해 희소화, 프루닝, 심볼화 단계를 거치게 된다. 이때, 마지막 심볼화 단계는 우리가 구한 단변수 함수를 근사하는 단계로, 근사에서 구한 그리드별 함숫값들을 바탕으로 정해둔 몇 가지 심볼 함수들에 대해 선형적인 확장을 포함해서 iterative grid search를 통해 근사를 해주게 되고, 바로 이 단계를 통해 우리가 구한 $p(\gamma)$의 근사 함수를 우리가 알고 있는 함수의 조합으로 표현할 수 있게 된다.

마지막으로 본 논문에서는 단순한 연속함수가 아닌 확률 분포 함수의 특징들을 고려하기 위해 두 가지 추가적인 방법론을 적용했다. 먼저, 함숫값이 항상 양수인 확률 분포함수의 특징을 고려하기 위해 $\log p(\gamma)$에 대한 근사로 문제를 수정했다. 그다음, 확률 분포함수의 적분값이 1인 특징을 반영하기 위해, loss 함수에 exponential을 취해 적분한 값이 1에서 멀어지는 값에 대한 페널티를 추가했다.

Ⅲ. 실험 결과

제안한 방법론에 대해 평가하기 위해 Nakagami-m 페이딩 채널을 통해 실험을 진행하였다. 특히, $m = 1$인 경우 Rayleigh fading에 해당하며, 이 경우 확률 분포함수[2]는 다음과 같이 표현된다.

$$p_{m=1}(\gamma)=\frac{1}{\bar{\gamma}}\exp(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}})$$

실험에 앞서 수식을 통해 KAN의 symbolic representation을 추측해 보면 인풋 γ에 대한 linear 함수와 exponential 함수의 composition, 즉, 하나의 히든레이어만 추가되면 충분함을 예상할 수 있고, 이를 기반으로 네트워크를 각각 히든레이어를 노드 2개짜리 하나를 추가한 네트워크인 [1, 2, 1]과, 같은 레이어를 하나 더 이어 붙인 [1, 2, 2, 1] 네트워크를 통해 실험하였다.

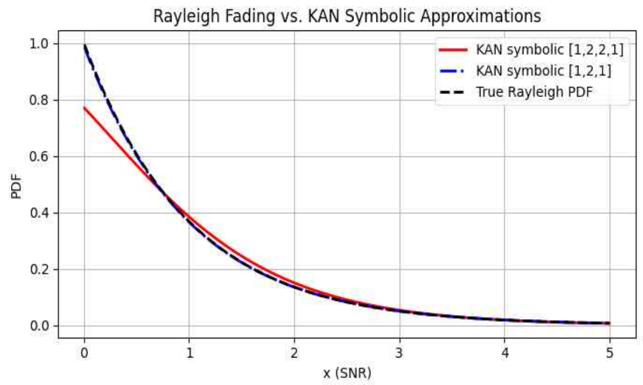

그림 1. KAN 기반 Rayleigh fading 확률 밀도 함수 근사

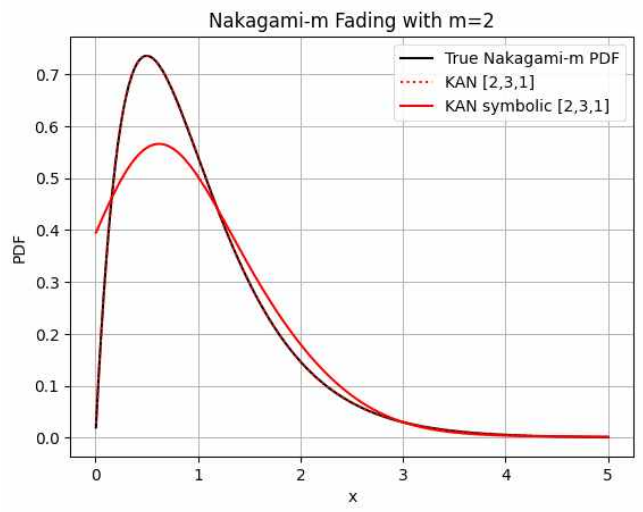

그림 2. KAN 기반 Nakagami-m fading 확률 밀도 함수 근사

그림 1에서 KAN symbolic이 의미하는 바는 근사 후 심볼화까지 적용했다는 것이다. 두 경우 모두 심볼화 이전 근사 자체는 10^{-6}이하의 mean square error (MSE)를 보였지만, 심볼화 과정 중에서 오차가 생겼으며, KAN 구조에 따라 interpretability의 차이가 생김을 확인할 수 있다. 여기서 확률분포함수임에도 불구하고 Kullback-Leibler divergence가 아닌 MSE를 사용한 이유는 기존 KAN 논문의 방법론을 그대로 이식하기 위함으로, 향후 연구에서는 KLD에 대한 적용도 고려하고 있다. 네트워크 구조 중 [1, 2, 1]의 경우 위에서도 언급했듯이 실제 심볼화 이후 함수를 확인한 결과 exponential 함수와 linear 함수의 곱으로 표현이 되었지만, [1, 2, 2, 1]의 경우, 본래 의도는 충분히 복잡한 네트워크를 쌓아 올리더라도 적절한 희소화와 프루닝을 통해 네트워크를 줄여서 해당 함수로 표현이 될 것이라 생각했는데, 희소화와 프루닝이 제대로 이루어지지 않아 억지로 함수들을 분해하고 근사하는 과정에서 심볼릭 함수를 제대로 선택하지 못해 오차가 생기는 것을 확인했다.

그림 2에서는 Nakagami-m 페이딩 채널 중 $m=2$인 경우에 대한 실험으로 [1 n, 1], [1 n, n, 1]과 같이 다양한 모델에서 실험해 본 결과 모두 symbolic 화 이전까지는 모두 근사가 성공하지만, 심볼화이후 굉장히 큰 오차가 발생하는 것을 확인하였다. 특히, $m=2$ 에서의 확률 밀도함수 [2]

$$p_{m=2}(\gamma)=\frac{4\gamma}{\bar{\gamma}^{2}}\exp(-\frac{2\gamma}{\bar{\gamma}})$$

에 대해, KAN 논문에서 $f(x,y)=xy$함수에 대해 근사한 경우 $xy=\frac{1}{2}((x+y)^2-(x^2+y^2))$임을 활용해서 표현한 것을 고려하여 인풋으로 같은 값을 넣어 [2, 3, 1] 형태의 네트워크를 구성함에 따라 심볼화 근사 성능이 좋아지는 것을 확인하였다.

Ⅳ. 결 론

본 논문은 Kolmogorov-Arnold Networks를 이용해 페이딩 채널의 SNR 확률 밀도 함수를 해석적으로 근사하는 방법을 제안하고, Rayleigh 및 Nakagami-m 채널에 대해 그 효과를 확인하였다. 로그 변환과 적분 정규화 페널티를 통해 확률 분포함수의 기본 제약조건을 만족시켰으며, 심볼화 단계에서 자동으로 추출된 단순 수식을 통해 모델 해석성을 확보하였다. 실험 결과, 얕은 KAN 구조는 높은 근사 정확도와 뛰어난 심볼화 성능을 동시에 달성한 반면, 과도한 깊이의 네트워크는 pruning 미흡으로 해석 과정에서 오차가 증가할 수 있음을 확인하였다. 이는 KAN 적용 시 네트워크 깊이와 희소화 전략이 핵심 설계 변수가 됨을 시사한다. 향후 연구에서는 TWDP 등 더 복잡한 페이딩 모델 및 실제 측정 데이터로 확장 실험, 온라인 학습을 통한 환경 적응형 PDF 근사, KAN 기반 채널 모델을 활용한 용량·에너지 효율·물리계층 보안 성능 분석 자동화 등을 통해 무선 시스템 설계 전반에 걸친 활용 가능성을 더욱 넓힐 예정이다.

참 고 문 헌

[1] M. K. Simon and M. -S. Alouini, “Digital communications over fading channels,” 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2005.

[2] S. M. Aldossari and K.-C. Chen, “Machine learning for wireless communication channel modeling: An overview,” *Wireless Pers. Commun.*, vol. 106, pp. 41 - 70, May 2019.

[3] J. Guo, C.-K. Wen, S. Jin, and G. Y. Li, “Overview of deep learning-based CSI feedback in massive MIMO systems,” *IEEE Trans.Commun.*, vol. 70, no. 12, pp. 8017 - 8045, Dec. 2022.

[4] Z. Liu, Y. Wang, S. Vaidya, F. Ruehle, J. Halverson, M. Soljaci c, T. Y. Hou, and M. Tegmark, “Kan: Kolmogorov-arnold networks,” in *Proc. ICLR*, Singapore, April 2025.