

선형 최소제곱 측위를 위한 공면상 센서 배치 최적화: Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization 접근

고준성, 박철순*, 나선필*, 정원주

고려대학교, *국방과학연구소

{rhwnstjd2004, wchung}@korea.ac.kr

Coplanar Sensor Placement Optimization for Linear Least-Square Localization using Quantum-behaved Particle Swarm Optimization

Jun-Sung Ko, *Cheol-Sun Park, *Sun-Phil Nah, Won-Zoo Chung

Korea University, *Agency for Defence Development

요약

본 논문은 공면상에서 센서의 위치를 추정하는 선형 최소제곱법 기반의 위치 추정 문제에서, 앵커의 공간적 배치가 추정 정확도에 미치는 영향을 분석하고 이를 최적화하는 방법을 제안한다. 센서의 위치 추정 오차 중 x축과 y축 방향의 분산을 각각 수치적으로 계산하고, 단위원, 사각형과 같은 특정한 구역 내에서 이 분산을 최소화할 수 있는 앵커의 최적 배치를 도출하였다. 최적화 알고리즘으로는 Quantum-behaved Particle Swarm Optimization(QPSO)을 사용하였다. 시뮬레이션을 통해 제약 공간 내에서의 무작위 배치에서의 오차 분산 측정 결과와 비교한 결과 제안한 배치가 추정 정확도에서 우수한 성능을 보였다. 본 연구는 공면상 센서 네트워크 설계 시 앵커 배치 최적화에 실질적인 기준을 제공하였다.

I. 서론

거리 기반 센서 위치 추정은 다양한 실세계 응용에서 핵심적인 기술로 활용되고 있다. 3차원에서의 정확한 위치 추정을 위해서는 최소 4개 이상의 공면상에 놓이지 않은 센서가 필요하다. [1] 센서가 공간상에 잘 분산되지 않을 경우, 분산되지 않은 방향으로의 추정 정확도가 감소한다. [2] 특히 센서가 동일 평면 또는 곡면 위에 존재하는 경우 좌표의 추정 자체가 실패한다. 그러나 비용과 물리적 한계와 같은 현실적 요소로 인해 센서를 설치할 수 있는 위치는 매우 한정된다. 특히 센서를 z축 방향으로 잘 분포되도록 설치하는 것은 더욱 그렇다. 따라서 현실적 한계를 고려하여 지상에 배치된 센서를 사용하여 목표를 정확히 추정하는 것이 중요한 과제가 된다. 본 연구의 선행 연구에서는 Newton 알고리즘 기반의 최소제곱법을 이용하여, 공면상에 놓인 센서로 목표의 위치를 안정적으로 추정하는 방법을 제안한 바 있다. [3] 하지만 선행 연구에서 위치 추정의 핵심 변수인 앵커의 기하학적 배치(geometry)가 전체 추정 정확도, 특히 오차 분산에 미치는 영향은 정량적으로 다루어지지 않았다.

본 논문에서는 앵커가 동일 공면상에 존재할 때, x 및 y 방향의 위치 추정 분산을 수치적으로 계산하고, 이를 통해 좌표 추정 전체의 오차를 최소화하는 앵커의 최적 배치 조건을 유도하였다. 이를 통해 앵커 배치가 위치 추정 정확도에 미치는 영향을 정량적으로 평가할 수 있으며, 실제 시스템에서의 배치 전략 설계에 실질적인 기준을 제공한다.

본 연구의 주요 기여는 다음과 같다. 첫째, 공면상 센서 위치 추정 문제에서 위치 오차의 분산(Var)을 계산 가능한 형태로 정식화하였다. 둘째, 수치 계산과 Quantum-behaved Swarm Optimization(QPSO) 기법을 통해 추정 오차가 최소가 되는 앵커의 최적 배치 조건을 도출하였다. 셋째, 시뮬레이션을 통해 제안한 배치가 기존 기법보다 낮은 오차 분산을 달성함을 확인하였다.

II. 시스템 모델

배치된 위치를 알고 있는 $N+1$ 개의 센서가 있고, 이때 목표의 위치는 모른다고 가정한다. 위치를 알고 있는 각 i번째 센서와 해당 센서의 x, y, z 좌표를 $a_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, \dots, N$, 목표의 위치를 $x = (x_t, y_t, z_t)^T$ 으로 정의한다. i번째 센서와 목표 간의 실제 거리를 d_i , 센서가 측정한 노이즈를 포함한 거리 데이터를 \hat{d}_i 라고 할 때 각각을 다음 수식들과 같이 표현할 수 있다.

$$d_i = \sqrt{(x_t - x_i)^2 + (y_t - y_i)^2 + (z_t - z_i)^2}, i = 0, \dots, N. \quad (1)$$

$$\hat{d}_i = d_i + \epsilon_i, i = 0, \dots, N. \quad (2)$$

본 논문에서는 각 거리 측정값의 노이즈 ϵ_i 가 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ 를 따르는 i.i.d. 샘플이라고 가정한다. 추정한 목표의 위치를 $\hat{x} = (\hat{x}_t, \hat{y}_t, \hat{z}_t)^T$ 라고 하며, 이 추정한 목표의 위치는 (1)의 식에서 d_i 를 \hat{d}_i 로 대체하고, 기준 센서(본 논문에서는 $i=0$ 을 기준 센서로 사용하였음)의 거리 방정식을 다른 센서가 측정한 거리 방정식에 대해 차분하여 최소제곱법을 풀으로써 얻을 수 있다.

$$2 \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_N & \bar{y}_N & \bar{z}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{y}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{d}_0^2 - \hat{d}_1^2 + \|a_1\|^2 - \|a_0\|^2 \\ \vdots \\ \hat{d}_0^2 - \hat{d}_N^2 + \|a_N\|^2 - \|a_0\|^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A := \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_N & \bar{y}_N & \bar{z}_N \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$b := \begin{bmatrix} \hat{d}_0^2 - \hat{d}_1^2 + \|a_1\|^2 - \|a_0\|^2 \\ \vdots \\ \hat{d}_0^2 - \hat{d}_N^2 + \|a_N\|^2 - \|a_0\|^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - x_0, i = 1, \dots, N. \\ \bar{y}_i &= y_i - y_0, i = 1, \dots, N. \\ \bar{z}_i &= z_i - z_0, i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} A \hat{x} = b \quad (7)$$

그러나 모든 센서가 지상에 배치된 경우, 즉 x-y 평면에 놓인 경우 각 센서의 모든 z 좌표가 동일하게 되어 행렬 A가 ill-conditioned하게 된다. 이처럼 센서가 공연상에 놓였을 때는 행렬 A가 invertible 하지 않아 일반적인 최소제곱법을 사용해 목표의 좌표를 추정할 수 없게 된다. 하지만 특정 평면에 놓인 센서가 해당 평면에 대해서는 충분히 잘 분산되어 있다고 가정할 경우, pseudo-inversion을 사용하여 잔존하는 축에 대한 목표의 위치는 안정적으로 추정할 수 있다. 본 연구에서는 지상에 배치된 센서 배치의 최적화를 다루므로, 모든 센서가 x-y 평면상에 놓여 있음을 가정한다. 목표의 x,y 좌표는 여전히 추정할 수 있으므로 이를 이용하여 목표의 좌표를 추정할 수 있다.

$$\hat{x}_t = x_t + \frac{\sum_{i=1}^N [(\bar{x}_i \|\bar{y}\|^2 - \bar{y}_i \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle) (d_0 \epsilon_0 - d_i \epsilon_i + \frac{1}{2} \epsilon_0^2 - \frac{1}{2} \epsilon_i^2)]}{\|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2} \quad (8)$$

$$\hat{y}_t = y_t + \frac{\sum_{i=1}^N [(\bar{y}_i \|\bar{x}\|^2 - \bar{x}_i \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle) (d_0 \epsilon_0 - d_i \epsilon_i + \frac{1}{2} \epsilon_0^2 - \frac{1}{2} \epsilon_i^2)]}{\|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2} \quad (9)$$

$$\hat{z}_t = \pm \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \sqrt{\hat{d}_i^2 - (\hat{x}_t - x_i)^2 - (\hat{y}_t - y_i)^2} \quad (10)$$

이 때 $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N]^T$, $\bar{y} = [\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N]^T$ 이다. 추정된 z의 부호는 목표가 존재할 수 있는 공간정보를 활용하여 확정할 수 있다. [4] 이 방법을 통해 추정한 x,y,z 좌표는 [4]에서 나온 Direct Method 방법을 통해 얻은 추정값과 동일하다. 위의 수식을 활용하여, 추정오차의 분산을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} Var(\hat{x}_t - x_t) &= \frac{(\dot{x} \|\bar{y}\|^2 - \dot{y} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^2 (d_0^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^4)}{(\|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2)^2} \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^N [(\bar{x}_i \|\bar{y}\|^2 - \bar{y}_i \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^2 (d_i^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^4)]}{(\|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{y}_t - y_t) &= \frac{(\dot{y} \|\bar{x}\|^2 - \dot{x} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^2 (d_0^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^4)}{(\|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2)^2} \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^N [(\bar{y}_i \|\bar{x}\|^2 - \bar{x}_i \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^2 (d_i^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^4)]}{(\|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{z}_t - z_t) &\approx \frac{1}{(N+1)^2 \sum_{i=0}^N (d_i^2 \sigma^2 + (x_t - x_i)^2)} Var(\hat{x}_t - x_t) \\ &+ (y_t - y_i)^2 Var(\hat{y}_t - y_i) \quad (\text{for } z_t \gg 1) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{x} := \sum_{n=1}^N \bar{x}_n, \quad \bar{y} := \sum_{n=1}^N \bar{y}_n \quad (14)$$

센서의 최적 배치는 추정오차를 최소화하여야 한다. 그러나 제안한 방법

을 통해 얻는 추정오차는 목표와의 거리에 의해 크게 변한다. 목표의 위치에 대한 사전정보를 추정 이전에는 얻을 수 없으므로 목표의 위치와 독립적인 지표가 필요하다. 다행히도 센서가 지상에 배치된 경우, 목표의 높이 z_t 가 충분히 커서 $z_t \gg x_t, y_t$ 를 만족한다고 볼 수 있다. 따라서 다음의 등거리 가정을 적용할 수 있다.

$$(z_t - z_i)^2 \gg (x_t - x_i)^2 + (y_t - y_i)^2 \quad (15)$$

$$d_i = d_j \quad \text{for } 0 \leq i, j \leq N \quad (16)$$

가정 하에서 \hat{x}_t, \hat{y}_t 의 추정오차는 대칭적이게 되어 목표 위치와 무관해진다. 또한 식 (10)에 의해, \hat{z}_t 의 추정 오차는 \hat{x}_t, \hat{y}_t 의 추정오차에 의존하므로 \hat{x}_t, \hat{y}_t 의 추정오차를 최소화하면 전체 추정오차를 최소화하게 된다. 따라서, 본 논문에서는 \hat{x}_t, \hat{y}_t 의 추정오차를 더하고 $d_0^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^4$ 의 값으로 나눈 다음의 비용함수를 제안한다.

$$\begin{aligned} C(\bar{x}, \bar{y}) &:= \frac{\frac{1}{\|\bar{x}\|^2} (\dot{x} \|\bar{y}\|^2 - \dot{y} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^2 + \frac{1}{\|\bar{y}\|^2} (\dot{y} \|\bar{x}\|^2 - \dot{x} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)^2}{(1 - \alpha_{\bar{x}, \bar{y}}^2)^2} \\ &+ \frac{\frac{1}{\|\bar{x}\|^2} (1 - \alpha_{\bar{x}, \bar{y}}^2)^2 + \frac{1}{\|\bar{y}\|^2} (1 - \alpha_{\bar{x}, \bar{y}}^2)^2}{(1 - \alpha_{\bar{x}, \bar{y}}^2)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\alpha_{\bar{x}, \bar{y}} := \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|} \quad (18)$$

본 비용 함수는 앵커들이 x-y 평면상에 넓고 고르게 분포할수록 감소하는 경향을 보인다. 그러나 실제 환경에서 앵커 위치가 x-y 평면에 무한히 퍼질 수 있다고 가정하는 것은 비현실적이며, 계산적으로도 부적절하다. 이에 본 연구에서는 앵커 위치가 단위원 상 또는 정해진 사각형 영역 내에 존재한다는 제한 조건 하에 최적화를 수행하였다. 또한 \bar{x}, \bar{y} 가 선형 종속 관계에 있을 경우 비용 함수가 발산하게 된다. 이러한 특이점이 포함된 배치는 최적화 과정에서 자동으로 제외되도록 알고리즘을 설계하였다. 제안된 비용 함수는 비선형적이며 고차원의 탐색 공간을 가지며, 특정 조건에서 특이점(singularity)이 존재하는 등 수학적으로 폐쇄형 해(close d-form solution)를 유도하기 어려운 구조를 가진다. 또한 본 비용 함수는 회전 불변성을 가지므로 전역 최소값은 존재하지만 그 해는 유일하지 않다. 즉 오차 분산을 최소화하는 최적 배치가 하나의 고정된 형태로 유일하게 존재하는 것이 아니라 동일한 비용을 갖는 여러 회전된 배치 형태들이 존재할 수 있다. 이러한 이유 때문에 수학적 해석을 통한 명시적 최적해 도출은 매우 어렵다.

따라서 본 연구에서는 수치 기반의 전역 최적화 접근법으로, 휴리스틱 알고리즘인 Quantum-behaved Particle Swarm Optimization (QPSO)를 적용하였다. [5] QPSO는 Particle Swarm Optimization을 확률적 모델에 기반하여 확장한 전역 최적화 기법으로, 적은 파라미터 수로도 높은 수렴성과 탐색 성능을 보이는 것이 특징인 휴리스틱 모델이다. 여러 연구에서 QPSO가 다양한 문제에 대해 전역 최적해에 안정적으로 수렴하는 것으로 잘 알려져 있으며, 구현이 간단하면서도 효과적인 성능을 보여주기 때문에 비용 함수 최적화에 활용하였다.

III. 시뮬레이션 결과

본 시뮬레이션에서는 4개의 앵커를 x-y 평면의 특정한 제약공간 내에 배치하는 조건에서 비용함수를 최적화하였다. 실험에서 사용한 제약공간 두 가지는 각각 단위원 내 배치 조건($x^2 + y^2 \leq 1$)과 일정한 사각형 범

위 내($-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$) 배치 조건이다.

최적화 알고리즘으로는 QPSO를 사용하였으며, 최대 반복 횟수는 200회로 설정하였다. 초기 입자 위치는 제약공간 내에서 균등 분포로 무작위 생성하였다. 알고리즘의 수축 계수 β 는 최대 0.9에서 0.4까지 반복에 따라 선형으로 감소하도록 설정하였다. 모든 시뮬레이션은 Matlab 환경에서 구현되었다. 시뮬레이션을 통해 얻은 4개 센서에 대한 단위원 제약 공간 내의 최적 배치는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_0 y_0 \\ x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.2635 & 0.9647 \\ -0.2635 & -0.9647 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

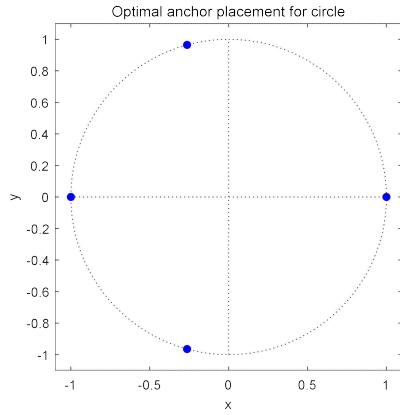


그림 1. 단위원 제약 공간 내의 최적 배치

다음은 4개 센서에 대한 사각형 제약 공간 내의 최적 배치를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} x_0 y_0 \\ x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

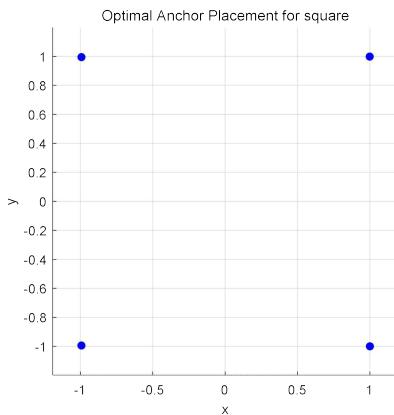


그림 2. 사각형 제약 공간 내의 최적 배치

마지막으로 센서 배치의 성능을 비교하기 위하여, 최적화된 센서 배치에서 측정한 측정오차의 분산을 다른 제약공간 내의 랜덤한 100개의 배치 조건에서의 측정오차의 분산과 비교하였다. 측정오차의 분산을 추정하기 위해서, 각 배치 및 목표 조합마다 백만 번의 거리 측정을 수행한 몬테카를로 시뮬레이션을 실행하였다. 거리 측정에는 평균 0, 분산을 갖는 가우시안 노이즈가 포함되었다. z 축 상의 고정된 높이의 단위원 위에 고르게 분포되도록 7개의 목표를 배치하였다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, x_k = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi(k-2)}{6} \\ \sin \frac{2\pi(k-2)}{6} \\ 3 \end{bmatrix} \text{ for } k = 2, \dots, 7. \quad (21)$$

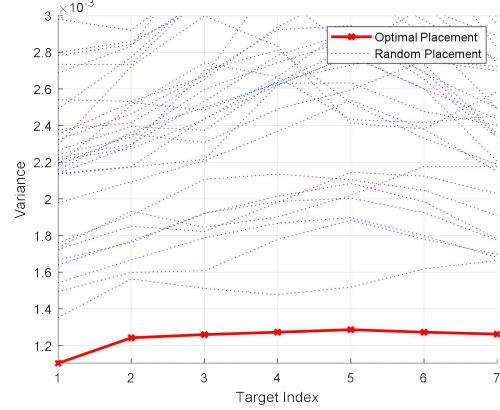


그림 3. 단위원 제약 공간 내의 배치별 추정오차 분산

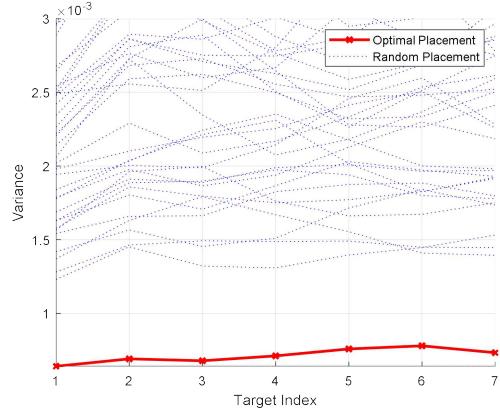


그림 4. 사각형 제약 공간 내의 배치별 추정오차 분산

그림 3,4는 최적화된 배치(적색 실선)와 무작위 배치(청색 점선) 간의 오차 분산 비교 결과를 나타낸다. 최적화된 배치의 경우, 모든 목표 위치에서 무작위 배치에서의 추정 결과보다 더 낮은 오차 분산을 보임을 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 본 연구에서는 거리 기반 위치 추정 시스템에서 센서의 공간 배치가 추정 정확도에 미치는 영향을 정량적으로 분석하고, 오차 분산을 최소화하는 최적의 센서 배치를 도출하기 위한 비용 함수를 제안하였다. 이 비용 함수는 센서 배치의 기하학적 특성을 반영하여 타깃 위치와 무관하게 정의되었으며, 비선형성과 특이점 구조로 인해 수학적 해석이 어려운 구조를 가진다. 이에 따라 휴리스틱 최적화 기법인 QPSO를 활용하여 최적 배치를 구하였다. 시뮬레이션 결과, 제안한 최적 배치는 다양한 타깃 위치에서 무작위 배치에 비해 더 낮은 측정 오차 분산을 보이며, 앵커 배치의 효과성을 입증하였다.

ACKNOWLEDGMENT

본 논문은 정부(방위사업청)의 지원으로 미래도전국방기술과제(No.

915087201)를 통해 연구가 수행되었다.

참 고 문 헌

- [1] A.N. Bishop, B. Fidan, B.D.O. Anderson, K. Doğançay, P.N. Pathirana, "Optimality analysis of sensor-target localization geometries," *Automatica*, vol. 46, no. 3, pp. 479 – 492, 2010.
- [2] Li, S. et al. A three-dimensional robust ridge estimation positioning method for UWB in a complex environment. *Adv. Sp. Res.* 60(12), 2763 - 2775 (2017)
- [3] Ko J. S., Chung W. Z., Optimal Initialization of Newton Algorithm using Least-Square for coplanar multi-lateration, Proceedings of the Winter Conference of the Korean Institute of Electromagnetic Engineering and Science (KIEES), Jeju, Korea, Feb. 2025.
- [4] M. Khalaf-Allah, "Novel solutions to the three-anchor ToA-based three-dimensional positioning problem," *Sensors*. vol. 21, no. 21, pp. 7325, Oct. 2021.
- [5] Sun, Jun, Wenbo Xu, and Wei Fang. "Quantum-behaved particle swarm optimization algorithm with controlled diversity." *International Conference on Computational Science*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006.