

Fisher 기반 상호 정보량 접근법

김현욱, 박정훈
연세대학교

garksi11@yonsei.ac.kr, jhpark@yonsei.ac.kr

Fisher based Mutual Information Approach

Kim Hyeon Uk, Park Jeong Hun
Yonsei Univ.

요 약

본 논문에서는 ISAC(Integrated Sensing and Communication) 시스템의 성능 평가를 위한 기존 지표인 Mutual Information(MI)과 Cramér-Rao Bound(CRB)의 특성과 한계를 분석하고, 이를 보완할 수 있는 새로운 성능 지표로 Fisher 정보 기반 Mutual Information(FMI) 을 제안한다.

I. 서 론

최근 통신과 센싱 기능을 동시에 수행하는 ISAC(Integrated Sensing and Communication) 시스템이 차세대 무선 통신 분야에서 주목받고 있다. 이에 따라 ISAC 시스템의 성능을 효과적으로 측정하고 최적화할 수 있는 성능 지표의 필요성이 대두되고 있다. 대표적인 기존 성능 지표로는 Mutual Information(MI)과 Cramér-Rao Bound(CRB)가 있으며, 각각 통신 및 센싱 성능을 대변하는 지표로 널리 활용되어 왔다. MI 는 채널 응답 자체를 Gaussian 확률변수로 가정하기 때문에 실제 시스템이 추정하려는 파라미터(parameter) 자체의 정보를 정확히 반영하지 못하는 한계가 있다. 그러나 MI는 통신 성능 지표인 SINR과 유사한 구조를 가지므로, 최적화 과정이 상대적으로 간단하다는 장점이 있다[1],[5]. 반면 CRB 는 파라미터 추정 오차의 하한을 나타내므로 센싱 성능을 정량적으로 해석하는 데 유리하나, SINR 과 다른 수학적 형태로 인해 최적화 구조에 바로 활용하기 어렵다는 단점이 있다.[3],[4] 이에 본 논문에서는 이러한 한계를 보완하고자, Fisher Information을 기반으로 Mutual Information을 재구성한 Fisher-based Mutual Information (FMI) 지표를 제안한다. FMI 는 파라미터에 대한 정보량을 나타냄과 동시에, 통신 성능 최적화 구조와의 연계가 가능하다는 장점을 갖는다. 본 논문에서는 제안된 지표의 수식 유도, 해석적 의미, 그리고 기존 MI 및 CRB 기반 성능 지표와의 비교를 통해 FMI 의 유용성을 이론적으로 분석한다.

II. 본론

본 논문에서는 다음과 같은 레이더 시스템 모델을 기반으로 분석을 진행한다

System model:

$$Y = GX + Z$$

여기서

$Y \in \mathbb{C}^{M \times T}$ 는 수신 신호 행렬,
 $G \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 는 채널 응답 행렬,
 $X \in \mathbb{C}^{N \times T}$ 는 송신 신호 행렬,
 $Z \in \mathbb{C}^{M \times T}$ 는 잡음 행렬이며, 각 성분은 독립적인 complex gaussian 분포 $CN(0, \sigma^2)$ 을 따른다고 가정한다. M 은 수신 안테나 개수, N 은 송신 안테나 개수, T 는 시간 또는 펄스 수를 의미한다.

채널 응답 행렬 G 는 다음과 같이 모델링 된다.

$$G = \alpha b(\theta) a^H(\theta) \triangleq A(\theta)$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ 은 타겟의 복소 반사 계수,

θ 는 추정 대상인 parameter

$b(\theta)$ 와 $a(\theta)$ 는 송신 및 수신 어레이의 steering vector 이다.

이와 같은 모델 하에서 parameter θ 에 대한 추정 정확도의 이론적 하한은 CRB 를 통해 표현될 수 있다. CRB 는 fisher information 의 역에 의해 정의되며, 스칼라 parameter θ 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq [J(\theta)]^{-1}$$

$$J(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(Y; \theta) \right)^2 \right]$$

이를 정리하여 유도하면 CRB 는 다음과 같은 형태로 나온다.[4]

$$\frac{\sigma^2 + \text{tr}(A^H(\theta)A(\theta)R_x)}{2L \left[\text{tr}(\dot{A}^H(\theta)\dot{A}(\theta)R_x) + \text{tr}(A^H(\theta)A(\theta)R_x) - |\text{tr}(\dot{A}^H(\theta)A(\theta)R_x)|^2 \right]}$$

SINR 의 식은 다음과 같다.

$$Y_k = \frac{|h_{kw_k}^H|^2}{\sum_{i=1, i \neq k}^K |h_{ki}^H|^2 + \sigma_c^2}$$

따라서 CRB 는 통신 성능 방식과 동시에 optimization 하기 어려운 것을 알 수 있다.

Sensing mutual information 은 다음과 같이 정리된다.[5]

$$MI = I(Y; G = A(\theta) | X) = H(Y | X) - H(Y | G, X) \\ = \frac{1}{2} \log \det \left(I + \frac{1}{\sigma^2} X^H E[A(\theta) A^H(\theta)] X \right).$$

형태를 봤을 때 SINR 과 매우 유사한 목적 함수를 같은 것을 확인할 수 있다.[1],[6]

이제 우리가 제안하는 FMI 식은 다음과 같다.

$$\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$$

기존 MI 는 channel response 와 observation 의 MI 를 구해 parameter 와 직접적인 상관 관계를 찾기 어려웠지만 FMI 는 parameter 와 observation 의 MI 를 구하여 좀 더 직관적인 방식이라고 할 수 있다. 이와 같은 접근은 최근 ISAC 분야에서 robust beamforming 이나 rate-splitting 기법의 확장과 결합될 수 있는 기반을 제공한다 [2], [3].

$$I(Y; \theta | X) = H(Y | X) - H(Y | \theta, X)$$

$p(Y | \theta, X)$ 는 non gaussian 이므로 Taylor expansion 을 이용하여 선형화 한다.

$$A(\theta) \approx A(\mu_0) + \left. \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\mu_0} (\theta - \mu_0)$$

따라서 우도 함수는 다음과 같이 근사화 된다.

$$p(Y | \theta, X) \approx A(\mu_0) X + \left. \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\mu_0} X (\theta - \mu_0) + N$$

이를 통해 엔트로피를 구하면 MI 의 식이 다음과 같이 나타나는 것을 확인할 수 있다.

$$I(Y; \theta | X) \approx \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma^2} X^H \left(\left. \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\mu_0} \right)^H \left(\left. \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\mu_0} \right) X \right)$$

이때 fisher information matrix 의 형태는 다음과 같다.

$$J(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} X^H \left(\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right)^H \left(\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right) X$$

따라서 위의 형태는 MI 식 안에 fisher information matrix 가 담겨있다고 해석할 수 있다. 따라서 이는 MI 와 CRB 의 장점을 전부 이용한 방법이라고 생각할 수 있다.[6]

III. 결론

본 논문에서는 기존 ISAC 시스템 성능 지표인 Mutual Information(MI)과 Cramér-Rao Bound(CRB)의 구조적 한계점을 분석하고, 이를 보완하기 위한 Fisher 정보 기반 Mutual Information(FMI)을 제안하였다. 제안한 FMI 는 파라미터 θ 가 Gaussian 분포를 따른다는 가정 하에, channel response 가 아닌 parameter 자체와 observation 간의 상호정보량을 정의함으로써 기존 MI 대비 더욱 직관적인 성능

해석이 가능하다. 또한 Taylor 전개를 통한 선형 근사 기법을 적용함으로써, FMI 는 CRB 처럼 파라미터 추정 정확도를 정량화할 수 있는 동시에 MI 와 유사한 수학적 구조를 가지게 되어 통신 시스템 설계에서의 최적화 관점에서도 유리한 특성을 지닌다.

따라서 FMI 는 통신과 센싱 기능을 통합하는 ISAC 시스템에서, 성능 평가 지표로서뿐만 아니라 시스템 최적화를 위한 설계 지표로도 활용될 수 있는 가능성을 보여준다. 이는 FMI 가 MI 와 CRB 의 장점을 결합한 새로운 해석 프레임워크로서, 향후 다양한 ISAC 응용 시나리오에서 실질적인 성능 개선을 도모할 수 있는 기반이 될 수 있음을 의미한다.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by Institute of Information & communications Technology Planning & Evaluation (IITP) grant funded by the Korea government(MSIT) (No. RS-2024-00397216, Development of the Upper-mid Band Extreme massive MIMO(E-MIMO))

참 고 문 헌

- [1] J. Park, J. Choi, N. Lee, W. Shin and H. V. Poor, "Rate-Splitting Multiple Access for Downlink MIMO: A Generalized Power Iteration Approach," in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 22, no. 3, pp. 1588-1603, March 2023, doi: 10.1109/TWC.2022.3205480.
- [2] J. Park et al., "Rate-Splitting Multiple Access for 6G Networks: Ten Promising Scenarios and Applications," in *IEEE Network*, vol. 38, no. 3, pp. 128-136, May 2024, doi: 10.1109/MNET.2023.3321518.
- [3] J. Choi, J. Park, N. Lee and A. Alkhateeb, "Joint and Robust Beamforming Framework for Integrated Sensing and Communication Systems," in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 23, no. 11, pp. 17602-17618, Nov. 2024, doi: 10.1109/TWC.2024.3454987.
- [4] J. Park, S. Park, A. Yazdan and R. W. Heath, "Optimization of Mixed-ADC Multi-Antenna Systems for Cloud-RAN Deployments," in *IEEE Transactions on Communications*, vol. 65, no. 9, pp. 3962-3975, Sept. 2017, doi: 10.1109/TCOMM.2017.2707099.
- [5] J. Park and R. W. Heath, "Low Complexity Antenna Selection for Low Target Rate Users in Dense Cloud Radio Access Networks," in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 15, no. 9, pp. 6022-6032, Sept. 2016, doi: 10.1109/TWC.2016.2577580.
- [6] J. Park, J. Choi, N. Lee, W. Shin and H. V. Poor, "Sum Spectral Efficiency Optimization for Rate Splitting in Downlink MU-MISO: A Generalized Power Iteration Approach," *2021 IEEE Wireless Communications and Networking Conference Workshops (WCNCW)*, Nanjing, China, 2021, pp. 1-6, doi:10.1109/WCNCW49093.2021.9420033.