

## 양극화 가중치 기반 극부호 설계 방법에 관한 고찰

백승엽\*, 주효상\*\*, 이상윤\*\*, 김상호\*\*†

\*성균관대학교 전자전기공학부

\*\*성균관대학교 전자전기컴퓨터공학과

†iamshkim@skku.edu

## A Study on Polarization-Weight-based Code Construction for Polar Codes

Seung Yeop Baek, Hyosang Ju, Sang-Yoon Lee, Sang-Hyo Kim\*

\* Department of Electronics and Electrical Engineering, Sungkyunkwan University

\*\*Department of Electrical and Computer Engineering, Sungkyunkwan University

## 요약

본 논문에서는 기존의 양극화 가중치( $\beta = 2^{1/4}$ ) 기반 부호 설계 방법에 대해 고찰한다. 먼저, 부호율에 따라  $\beta$  값을 조절해 나가며 극부호의 복호 성능 경향성을 분석한다. 두 번째로, 극부호의 연속 제거 리스트 복호 시 리스트 크기에 따라  $\beta$  값에 따른 기존 기법 대비 성능 경향을 관찰한다. 실험 결과, 부호율이 높아질수록, 적은 리스트 크기의 복호기를 사용할수록 최적  $\beta$  값이 작아짐을 확인하였다.

## I. 서론

극부호는 다양한 종류의 이진 입력 이산 무기억 채널에서 부호길이가 길어짐에 따라 낮은 복호 복잡도로 채널 용량을 달성하는 것이 증명된 첫 부호이다[1]. 극부호는 채널 합성과 분리를 통해 동일한  $N$ 개의 채널들을, 서로 다른 채널 용량을 갖는  $N$ 개의 분리채널들로 분화하며, 이를 채널 양극화(channel polarization)라 한다. 이 과정으로 채널용량이 커서 통신을 하기에 적합해지는 반면, 매우 작아 통신에 부적합한 채널들도 생겨난다. 이 때 데이터를 전송할 분리채널들을 선택하는 과정을 부호 설계(code design)라 하며, 부호 설계 방법에 따라 복호 성능이 크게 달라질 수 있다.

그 중에서도, 양극화 가중치(polarization weight, PW) 기반 부호 설계는 대표적인 부호-무관(code agnostic) 설계 방법으로, 양극화 단계에서의 업그레이드(혹은 다운그레이드)에 대한 가중치 점수 합으로 신뢰도를 평가한다. 이 방법은 매우 간단하면서도 빠른 설계가 가능하며, 하나의 시퀀스로 다양한 부호 파라미터에 대응 가능하다. 더불어 우수한 복호 성능을 갖는다. 이 때, 메트릭의 유일한 매개변수인  $\beta$  값은  $2^{1/4}$ 로 설정한다.

$\beta \approx 2^{1/4}$ 이 넓은 영역에서 우수한 복호 성능을 갖지만, 다양한 부호 파라미터에 대해 이 값이 최적의 성능을 제공하는 지에 관한 선행 연구가 없다. 논문 [6]에서는 고부호율 극부호에서 최적  $\beta$  경향성에 대해 분석한 바 있으나, 부호율 이외에도 부호길이, 리스트 크기 등 다양한 변수에 따른 최적  $\beta$  값의 경향성에 대해 분석할 필요가 있다. 본 논문에서는, 다양한 요인에 따라 극부호의 복호 성능을 분석하고, 실험 결과 부호율이 높아지거나 적은 리스트 크기로 복호 시  $\beta$ 가 기존의  $2^{1/4}$  보다는 적은 값으로 설정되어야 더 우수한 성능을 달성할 수 있음을 보인다.

## II. 극부호 배경 지식

## (1) 시스템 모델 소개

$\mathbf{u}$  벡터 (소스 벡터)는 정보비트들과 고정비트들이 함께 존재하며, 크기가  $N$ 이다. 정보비트는  $\{0,1\}$  중 하나의 이진 값을 갖고 고정 비트는 항상 0으로 고정한다. 이후 생성행렬  $G_N$ 과의 곱을 통해 부호어  $\mathbf{d}$ 를 생성하며, 변조되어 심볼 단위로 i.i.d. (independent and identically distributed) 채널  $W$ 을 통과해 수신 신호 벡터  $\mathbf{r}$ 이 된다. 이 때  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{r}$ 을 연결하는 커다란 합성 채널  $W_N$ 이 정의되며 채널 합성(channel combining)이라 한다.

채널 분리(channel splitting)은  $W_N$ 으로부터 각 소스 비트들이 경험하는 가상의 분리채널(split channel)  $W_N^{(i)}$ 을 정의하는 과정으로, 분리 채널은  $u_i$ 를 입력으로 했을 때  $\mathbf{r}, \mathbf{u}_0^{i-1}$ 를 출력으로 하는 친이 확률  $W_N^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_0^{i-1} | u_i)$ 에 의해 정의된다. Genie-aided SC 복호 하에서의 분리채널들의 분리채널들의 신뢰도를 평가할 수 있다.

$P_N^{(i)}$ 를 분리채널  $W_N^{(i)}$ 의 신뢰도라 할 때,  $P_N^{(i)}$  값의 오름차순으로 인덱스들을 정렬할 수 있으며, 이를 극부호 시퀀스(polar code sequence)라 하며  $Q_0^{N-1}$ 이라 표기한다.  $P_N^{(i)}$ 가 작아 부호 시퀀스의 앞쪽에 위치한 비트들은 값을 고정시켜 보내고,  $P_N^{(i)}$ 가 커서 부호 시퀀스의 뒤쪽에 위치한 비트들은 데이터 전송을 위해 사용된다.

다양한 부호 설계 방법들이 제안되어 왔으며[2-5], 부호 설계는 크게 채널-의존(channel dependent)적 설계와 부호-무관(code-agnostic) 설계로 구분할 수 있다. 채널 의존 설계는 밀도 진화(density evolution) [2]와 가우시안 근사(Gaussian approximation) [3]과 같이 부호 파라미터에 따라 최적의 정보집합 구성이 달라질 수 있다. 부호 무관 설계는 부호 파라미터에 관계없이 전반적으로 우수한 성능을 갖도록 유일한 정보집합을 구성하며, 채널 의존 설계와 같이 무수히 많은 개별 최적 부호 시퀀스들을 저장하지 않아도 되는 장점이 있다. 양극화 가중치(polarization weight, PW) 방법이 대표적이며, 5G 표준에서도 부호 무관 부호 시퀀스를 정의한다.

## (2) 양극화 가중치 기반 극부호 설계 방법

논문 [5]에서는 PW 기반 부호 설계 방법을 제안하였다. PW 방법에 의해 부호를 설계하면, 얻어진 단일 부호 시퀀스는 채널 파라미터에 무관하게 사용될 수 있다. 분리채널  $W_N^{(i)}$ 에 상응하는 신뢰도  $P_N^{(i)}$ 는 다음과 같이  $\beta$ -expansion에 기반해 정의된다.

$$P_N^{(i)} = \sum_{t=0}^{n-1} i_t \beta^t$$

여기서  $i_t$ 는 인덱스  $i$ 의 이진 확장(binary expansion), 즉  $\langle i \rangle_2 = (i_{n-1} \dots i_1 i_0)$ 의 엔트리를 의미하며,  $\beta$ 는 광범위한 파라미터 영역에서 우수한 부호가 생성되도록  $\beta = 2^{1/4}$ 로 결정되었다 [5].

$\beta$  값을 작게 설정하는 것은, 초기 양극화 단계에서의 업그레이드(혹은 다운그레이드) 효과를 적게 반영하는 것으로  $\beta = 1$ 로 설정하는 경우 RM

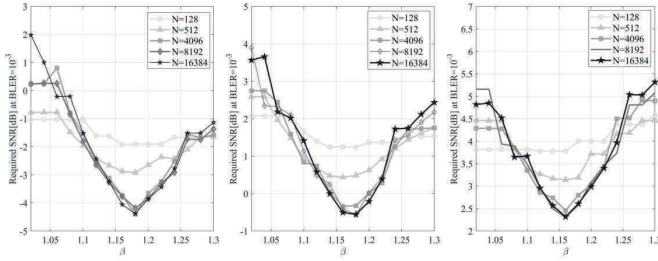


그림 1. (좌측부터) 부호율이 1/4, 1/2, 3/4일 때 각 부호길이마다  $\beta$  값에 따른 블록 오류율 0.1%를 달성하는 요구 SNR[dB] 비교

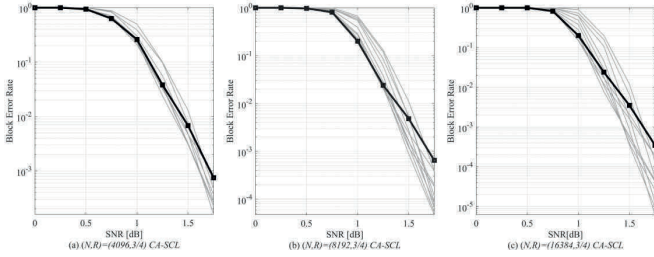


그림 2. (좌측부터) 부호길이가 4096, 8192, 16384일 때 부호율이 3/4인 극부호의 CRC-aided SCL 복호 시 블록 오류 성능 비교.

부호 설계 기준과 동등해진다. 한편,  $\beta$  값이 커질수록 비트들의 행 무게보다는 MSB (most significant bit) 부근의 양극화 업그레이드 효과를 크게 반영한다.

### III. 시뮬레이션 결과

본 절에서는 다양한 부호율과 서로 다른 리스트 크기를 갖는 SCL 복호기에 대하여  $\beta$  값에 따른 극부호의 성능을 분석한다. 부호길이는 {128, 512, 4096, 8192, 16384}, BPSK 변조를 고려하였으며, 부호율은 {1/4, 1/2, 3/4} 이다. 그림 1은 부호율에 따라  $\beta$  값에 따른 블록 오류율(block error rate, BLER)  $10^{-3}$ 를 달성하는 요구 SNR[dB]를 비교한 것으로, 그 값이 작을수록 성능이 우수하다. 또한, 각 부호율에 대해 다양한 부호길이의 성능도 함께 관찰하였다. 가장 먼저, 부호길이가 길어질수록  $\beta$  값의 변화에 따른 성능 차이가 두드러짐을 알 수 있다. 이는 부호길이가 길어지면  $\beta$ 의 민감한 변화에도 서로 다른 신뢰도 랭킹을 갖는 비트들의 쌍의 개수가 크게 늘어나기 때문이다. 두 번째로, 부호율이 1/4일 때는 최적의  $\beta$ 가 약 1.18 부근으로, 길이가 길어질수록 이 값에 수렴함을 알 수 있다. 하지만, 부호율이 증가할수록 이 최적 값은 점차 줄어들며, 부호율이 3/4일 때는 약  $\beta \approx 1.16$  부근에서 최적점을 형성한다. 즉, 부호율이 높아질수록 최적  $\beta$ 가 줄어든다.

그림 2는 다양한 부호길이에 대하여 부호율이 3/4일 때 극부호의 CRC-aided SCL 복호 성능을 비교한 것이다. 검정색 solid 선은 논문 [5]의  $\beta = 2^{1/4}$  성능을 나타내며, 회색 solid 선은  $\beta \in [1.16:1.20]$ 의 다양한  $\beta$ 에 대한 성능이다. 실험 결과, 부호길이가 길어질수록 더 많은 해당 영역 내의 더 많은  $\beta$ 들이 우수한 성능을 달성함을 알 수 있다.

그림 3은 리스트 크기에 따라  $\beta$  값에 따른 BLER  $10^{-4}$ 를 달성하는 요구 SNR을 비교한다. 구체적으로, 점선은  $\beta = 2^{1/4}$ 일 때의 성능이고, 실선은 다양한  $\beta$  값에 대한 복호 성능을 나타낸다. 먼저 N=512 (그림 2(a))일 때 보다 N=8192 (그림 2(b))일 때  $\beta = 2^{1/4}$  대비 얻어지는 성능 이득의 폭이 두드러짐을 알 수 있다. 예컨대, SC 복호 하에서는 최대 성능 이득이 0.17dB에 그침에 반해, N=8192에서는 약 0.71dB의 성능 이득을 갖는다. 두 번째로, 리스트 크기가 커짐에 따라 대체로 성능 이득의 폭이 줄어든다.

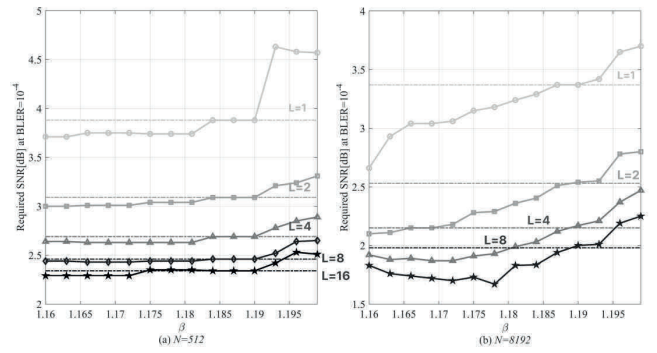


그림 3. 리스트 크기에 따른  $\beta = 2^{1/4}$  대비 다양한  $\beta$  값을 적용했을 때의 BLER  $10^{-4}$ 를 달성하는 요구 SNR 비교: (a) N=512, (b) N=8192.

다. 세 번째로, 리스트 크기가 증가함에 따라 대체로 최적 성능을 갖는  $\beta$  값이 증가함을 알 수 있다. 이는, 리스트 크기가 커지는 것이 어느 정도 부호의 최소거리 효과를 반영하고 있기 때문으로 해석할 수 있다.

### IV. 결론

본 논문에서는 부호 무관 설계 방법인 양극화 가중치 기반 부호 설계에 관하여 심층적인 분석을 수행하였다.  $\beta = 2^{1/4}$ 는 전반적인 부호 파라미터 영역에서 우수한 복호 성능을 지원하지만, 부호율이 높아지거나, 적은 리스트 크기의 복호를 수행하면 최적  $\beta$  값 (혹은 그 영역)이 작아지는 것을 확인하였다. 예컨대, 부호율이 높아질수록 초반 양극화 단계에서의 가중치보다, 행 무게가 높은 비트의 중요도가 더 높다. 추후 연구로는, 타겟 오류율에 따른 최적  $\beta$  값의 경향성을 살펴본다. 또한, PW 부호가 대칭적으로 설계되는 제한이 있는 바, 비대칭 부호 설계를 통해 저부호율 성능을 유지하면서 고부호율 복호 성능을 더욱 개선할 수 있는 방법에 대해 고려할 수 있을 것이다.

### ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2025년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원(RS-2024-00398449)과 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(RS-2024-00343913)

### 참고 문헌

- [1] E. Arıkan, "Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 55, no. 7, p. 3051–3073, Jul. 2009.
- [2] R. Mori and T. Tanaka, "Performance and construction of polar codes on symmetric binary-input memoryless channels," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Inf. Theory (ISIT)*, p. 1496–1500, Jul. 2009.
- [3] P. Trifonov, "Efficient design and decoding of polar codes," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 60, issue: 11, Nov. 2012, p. 3221–3227.
- [4] 3GPP, NR: Multiplexing and channel coding, TS 38.212, v. 15.2.0, Sep. 2018.
- [5] G. He et al., " $\beta$ -expansion: A theoretical framework for fast and recursive construction of polar codes," in *Proc. IEEE Global Commun. Conf. (GLOBECOM)*, Dec. 2017.
- [6] S. Y. Lee, H. Ju, S. H. Kim, "A new code design with modified polarization weight for high-rate polar codes," in *Proc. Joint Conf. on Commun. and Inf. (JCCI)*, Republic of Korea, Apr. 2024.