

## 저 복잡도 디매퍼가 적용된 극부호의 성능 분석

이상윤, 주효상, 김상효\*  
성균관대학교 전자전기컴퓨터공학과

iamshkim@skku.edu\*

## Performance Analysis of Polar Codes with a Simplified Demapper

Sang-Yoon Lee, Hyosang Ju, Sang-Hyo Kim\*

Department of Electrical and Computer Engineering, Sungkyunkwan University

## 요약

본 연구에서는 저 복잡도의 디매핑 방법에 대해 고찰하고 극부호에서의 성능을 분석한다. 직교 진폭 변조(QAM: quadrature amplitude modulation) 환경을 고려하였을 때, 채널로부터 얻은 수신 신호와 성상도(constellation point) 간의 조건부 확률에 기반해 복호기의 초기 입력 로그-우도 비(LLR: log-likelihood ratio)를 계산한다. 본 연구에서는 극부호의 간소화된 로그-우도 비 계산 방법에 대해 소개하고, 시뮬레이션을 통해 종래 복조 방법 기반의 극부호의 성능과 비교한다.

## 1. 서론

2009년, Erdal Arikan에 의해 제안된 극부호(polar codes)는 연속 제거(SC: successive cancellation) 복호 하에 부호길이 가 길어짐에 따라 증명적으로 채널 용량을 달성할 수 있는 최초의 오류정정부호이다 [1].  $N$ 개의 이진-이산 무기억 채널(B-DMC: binary-discrete memoryless channel)  $W$ 는 채널 합성(combining) 및 분리(splitting)를 통해 서로 다른 신뢰도를 갖는  $N$ 개의 가상 분리 채널을 생성한다.

한편, 통신 세대의 진화에 따라 다량의 데이터 전송에 대한 수요가 증가하고 있으며, 제한된 주파수 자원 내에서 신뢰성 높은 전송을 보장하는 기술의 중요성이 더욱 부각되고 있다. 이에 따라 고 데이터를 전송을 지원하는 QAM 변조 및 복조 방식과 우수한 오류정정 성능을 갖춘 극부호를 결합한 BICM (bit-interleaved coded modulation) 시스템이 주목받고 있으며 본 연구에서도 이를 기반한다. 그러나, 변조 차수가 증가함에 따라 복조기의 계산 복잡도가 기하급수적으로 증가하는 문제가 발생한다. 복잡도 저감을 위한 선행 연구들이 수행되어 왔지만 [2,3], 극부호에 적용 가능성에 대해 충분한 연구가 이루어지지 않았다.

본 논문에서는, BICM 시스템의 복조 방법에 대해 상술하고, 기존의 간소화된 복조 방법을 극부호에 적용하여 시뮬레이션을 통해 성능을 분석한다.

## II. 극부호 및 BICM 시스템 개요

## 1. 극부호 소개

극부호는 채널 양극화를 통해 서로 다른 신뢰도를 갖는 가상의 분리 채널(split channel)  $W_N^{(i)}$ 를 정의한다. 먼저, 길이  $N$ 인 소스 벡터  $\mathbf{u}_1^N$ 과 수신신호  $\mathbf{y}_1^N$ 을 각각 입력과 출력으로 하는 하나의 합성 채널  $W_N(\mathbf{y}_1^N|\mathbf{u}_1^N) = \prod_{i=1}^N W(y_i|x_i)$ 을 정의한다. 이때,  $W(y_i|x_i)$ 는 채널  $W$ 를 통해 입력  $x_i$ 가 출력  $y_i$ 로 전송될 조건부 확률을 의미한다. 이러한 합성 채널  $W_N$ 로부터 양극화된 신뢰도를 갖는 분리 채널  $W_N^{(i)}$  ( $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ )을 얻게 되며, 높은 신뢰도를 갖는 분리 채널을 통해 데이터를 전송함으로써 안정적인 통신을 가능하게 한다.

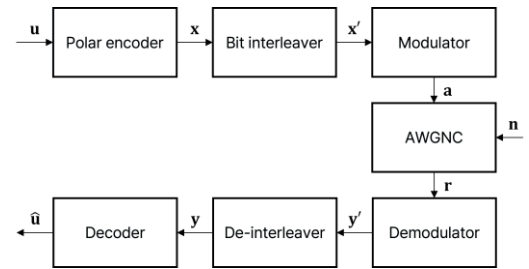


그림 1. BICM 시스템

## 2. BICM (bit-interleaved coded modulation)

BICM은 채널 부호화와 변조를 결합한 디지털 전송 방식이며, 그림 1의 주요 블록들의 기능은 다음과 같다.

- 1) 극부호화(polar encoding): 길이  $N$ 의 소스 벡터  $\mathbf{u}$ 는 생성행렬  $\mathbf{G}_N (= \mathbf{G}_2^{\otimes n}, \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$ 과 곱해져 부호어 벡터  $\mathbf{x}$ 를 생성한다.
- 2) 비트 인터리빙(bit interleaving): 부호어 벡터  $\mathbf{x}$ 는 변조 전 비트 단위로 인터리빙되어, 페이딩(fading) 또는 심볼 간 간섭에 강건성을 향상시키고, 특히 고차 변조 방식과 결합 시 전송 효율을 극대화할 수 있다.
- 3) 변조(modulation): 인터리빙된 부호어 벡터  $\mathbf{x}'$ 는 변조 차수( $M$ )와 동일한 길이의 심볼로 나뉘며, QAM의 경우 각 심볼은 해당하는 성상도에 맵핑되어 채널을 통해 송신단으로 전송된다.
- 4) 복조(demodulation): 수신 신호  $\mathbf{r}$ 과 변조 심볼  $\mathbf{a}$ 로부터 복호기에 전달할 초기 로그-우도 비를 계산한다. QAM 환경에서 심볼 내 실수 축 상의  $k$ 번째 비트를  $b_{l,k}$ 라 할 때,  $b_{l,k}$ 의 정확한 로그-우도 비(exact LLR)값은 다음과 같다.

$$L(b_{l,k}) = \log \frac{\sum_{\alpha \in S_{l,k}^{(1)}} P(r_l | a_l = \alpha)}{\sum_{\alpha \in S_{l,k}^{(0)}} P(r_l | a_l = \alpha)} \quad (1)$$

이 때,  $S_{l,k}^{(c)}$ 는 실수 축 상에서  $k$ 번째 비트가  $c$ 인 성상도 상 좌표들의 집합을 의미한다. 식 (1)의 경우,  $\alpha \in S_{l,k}^{(c)}$ 를

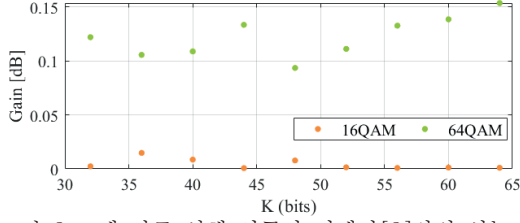


그림 2.  $K$ 에 따른 선행 연구된 디매퍼 [2]와의 성능 비교

만족하는 모든 심볼에 대한 확률을 계산하므로, 변조 차수가 증가할수록 계산 복잡도가 지수적으로 증가하는 단점이 있다. 이러한 계산 부담을 완화하기 위해, QAM 기반 무선 통신 환경에서는 로그-합 근사(log-sum approximation)를 이용해 가장 높은 확률을 갖는 심볼만을 고려해 로그-우도 비를 계산하는 방법이 제안되었으며 [2], 수식은 다음과 같다.

$$L(b_{l,k}) = \log \frac{\max_{a \in S_{l,k}^{(1)}} P[r_l | a_i = \alpha]}{\max_{a \in S_{l,k}^{(0)}} P[r_l | a_i = \alpha]} \quad (2)$$

- 5) 복호화(decoding): 복조기로부터 입력된 확률 기반의 소프트 정보(soft-information)를 이용하여 소스 벡터  $\hat{\mathbf{u}}$ 를 추정한다. 최초의 극부호의 복호 방법으로 연속 제거(SC: successive cancellation) 복호가 제안되었으나 [1], 유한 부호 길이에서 기존의 LDPC (low-density parity check) 부호나 터보 부호에 비해 저하된 성능을 보였다. 이를 보완하기 위해, 복조기에서 여러 후보 경로를 유지하면서 각 경로의 우도(likelihood)를 계산하고, 가장 높은 우도를 갖는 경로를 선택하는 연속 제거 리스트(SCL: SC-list) 복호 기법이 제안되었다 [4]. 또한, CRC (cyclic redundancy check) 비트를 추가로 연결함으로써 오류 검출 성능을 크게 향상시킬 수 있었다 [5].

### III. 극부호를 위한 저 복잡도 디매퍼 설계

QAM 환경에서 식 (1)을 이용한 로그-우도 비 계산은 높은 계산 능력을 요구한다. 식 (2)에서는 가장 높은 확률을 갖는 심볼만을 고려하는 근사 기법이 제안되었으나, HARQ (hybrid automatic repeat request)와 같은 반복 전송 환경에서는 성능 저하가 발생할 수 있다는 한계가 존재한다 [3]. 이에 본 연구에서는 식 (2)에서 생략된 정확한 로그-우도 비 연산에서의 비선형 항을 반영한 디매퍼 구조를 극부호에 적용하고, 그 성능을 분석한다. 먼저, 16QAM의 경우, 실수 축만 고려하였을 때 모든  $S_{l,k}^{(c)}$ 에 대해 로그-우도 비를 선형 항과 비선형 항으로 정리하면,

$$L(b_{l,k}) = \frac{4d}{2\sigma^2} (2hy_l + 2|h|^2d) + A_1 - A_2 \quad (3)$$

이다. 이때,  $\sigma^2$ 은 AWGN(additive white Gaussian noise) 채널에서 잡음의 분산,  $h$ 는 채널 이득 계수를 나타낸다.  $A_j$  ( $j = 1, 2$ )는 식 (1)의 분모, 분자의 비선형 항으로써,

$$A_j = \log \left[ 1 + \exp \left\{ \frac{4d}{\sigma^2} (m_j hy_l + n_j |h|^2 d) \right\} \right] \quad (4)$$

와 같이 정의된다. 여기서 계수  $m_j, n_j$ 는 표 1에 제시된 값에 따라 결정된다. 한편,  $A_j$ 는  $h$ 와  $\sigma^2$ 에 따라 값이 변하므로,  $A_j = f(x) = \log(1 + e^x)$  형태로 일반화할 수 있으며, 계산 간소화를 위해  $f(x) \approx \max(0, ax + b, x)$ 로 근사할 수 있다. 시뮬레이션을 통해 도출된 최적 계수는  $(a, b) = (0.28, 0.58)$ 이다 [3]. 64QAM의 경우,  $A_j = \log \left( 1 + \sum_{j=1}^{3(j-1)+3} \exp \left\{ \frac{4d}{\sigma^2} (m_j hy_l + n_j |h|^2 d) \right\} \right)$ 이며, 지수항의 최대값만을 고려함으로써  $A_j$ 를 근사할 수 있다.

### IV. 실험 결과

본 절에서는 비선형 항을 고려한 디매퍼를 적용한 극부호의 성능을 분석한다. 변조 차수  $M \in \{4, 6\}$ , 부호율  $R \in [0.25:0.5]$ , 부호길이  $N \in \{128, 512\}$ 에서 로그-합 근사 기반 디매퍼와 제안 디매퍼 간 복호 성능 비교를 수행하였으며, 11-CRC,  $L = 8$ 인

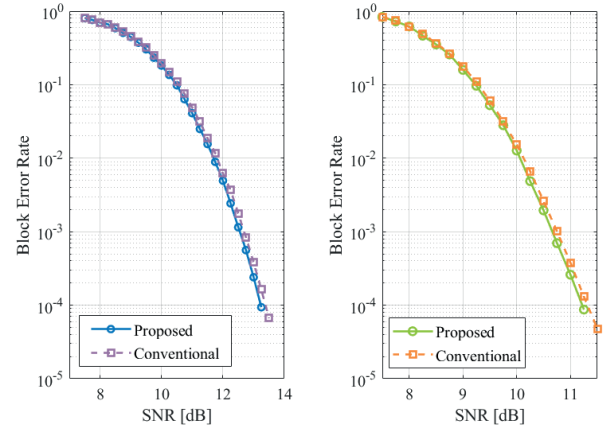


그림 3, 4.  $N = \{128, 512\}$ 에서의 블록 오류 성능 비교

CA-SCL 복호를 가정했다. 구체적으로,  $N = 128$ 에서  $K$ 가 증가함에 따라 종래 연구 [3]와 BLER (block error rate)이  $10^{-4}$ 을 달성하는 요구 SNR [dB]의 차이를 측정하였으며 (그림 2),  $M$ 이 증가함에 따라 성능 이득 또한 증가함을 확인할 수 있다. 또한, 64QAM 환경에서  $(N, K) = (128, 36)$ 과  $(N, K) = (512, 208)$ 일 때 BLER 추이를 측정하였으며 (그림 3, 4), 각각 약 0.15dB, 0.1dB의 이득을 보인다.

### V. 결론

본 논문에서는 BICM 시스템을 소개하고, 로그-우도 비의 비선형 항을 고려한 저 복잡도 디매퍼의 설계 방법을 상술한다. 또한, 다양한 부호 매개변수를 고려한 시뮬레이션을 통해 극부호와 결합 가능성을 분석하였다. 본 연구를 통해 [2]에서 고려하지 않은 로그-우도 비의 비선형 항들을 반영함으로써 극부호의 고차 변조 환경에서 디매퍼의 성능 개선을 확인할 수 있었다.

### ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2025년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원(RS-2024-00398449), 한국연구재단의 지원(RS-2024-00343913), 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임 (RS-2024-00397216).

### 참고 문헌

- [1] E. Arıkan, "Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3051-3073, Jul. 2009.
- [2] F. Tosato and P. Bisaglia, "Simplified soft-output demapper for binary interleaved COFDM with application to HIPERLAN/2," in *Proc. 2002 IEEE International Conference on Communications, Conference (ICC)*, USA, 2002, pp. 664-668 vol. 2.
- [3] J. W. Kang, S. -H. Kim, Y. -S. Jung, S. Yoon and T. H. Han, "A New Demapper for BICM System with HARQ," *2009 IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall*, AK, USA, 2009.
- [4] I. Tal and A. Vardy, "List Decoding of Polar Codes," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 5, pp. 2213-2226, May 2015.
- [5] K. Niu and K. Chen, "CRC-Aided Decoding of Polar Codes," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 16, no. 10, pp. 1668-1671, Oct. 2012.

표 1. 16QAM에서 실수 축 상의  $m_j, n_j$

		$m_1$	$n_1$	$m_2$	$n_2$
$b_{l,0}$	$y_l < -2d$	1	-2	1	2
	$-2d \leq y_l < 2d$	1	-2	-1	-2
	$y_l \geq 2d$	-1	2	-1	-2
$b_{l,1}$	$y_l < 0$	1	0	3	0
	$y_l \geq 0$	-1	0	-3	0