

# 네트워크 벨 비고전성 연구 동향

배광일, 이원혁\*

\*한국과학기술정보연구원

kibae@kisti.re.kr, \*livezone@kisti.re.kr

## Advances in Bell non-classicality in networks

Kwangil Bae, Wonhyuk Lee\*

\*Korea Institute of Science and Technology Information

### 요약

네트워크 벨 부등식은 한 개의 상태원 (source) 을 고려하는 기존의 일반적인 벨 부등식의 측정 시나리오를 일반화하여, 2개 이상의 독립적 상태원을 포함한 네트워크에서 벨 비고전적 상관관계를 판별한다. 본 논문에서는 네트워크 벨 비고전성과 관련한 기본적인 개념을 소개하고 이를 바탕으로, 관련 연구 결과를 살펴본다. 해당 분야 연구는 현재 초기 단계에 있으므로, 다양한 측정 상황과 네트워크 형태로 일반화하는 것을 목표로 하는 연구 결과보다 삼각(triangle), 이중국소(bi-local) 네트워크와 같이 기초적인 네트워크 형태에 대하여 발표된 중요 결과와 연구방법론을 중심으로 연구 동향을 분석한다.

### I. 서론

엄밀 분배 구현 기술 발전은 분배된 얽힘을 네트워크에서 활용하는 방법에 대한 연구에 시의성을 더하고 있다. 단일 링크에 분배된 얽힘의 가장 대표적인 응용 사례로 벨 상관관계 판별 시험을 통해 그 안전성이 판별 가능한 기기-독립적(device-independent, DI) 양자암호 프로토콜이 대표적이다 [1]. 이 같은 양자암호 프로토콜의 응용 가능성은 벨 비고전성에 대한 연구에 단순히 이론적으로 비고전적 현상을 확인하고 분석하는 것 이상의 실용적 중요성을 더하고 있다.

벨 부등식이 판별하는 상관관계와 비슷한 비고전적 상관관계를 양자 네트워크에서 구현하고 판별하기 위한 방법에 대한 연구는 2010년대 이후 지속적으로 주목받고 있다 [2]. 네트워크 벨 비고전성은 기존의 한 개 양자 상태원(source)을 가정하여 판별되는 벨 비고전성을 일반화하여 2개 이상의 상태원을 포함한 네트워크에서 판별되는 벨 비고전성을 의미한다. 네트워크 벨 비고전성에 대한 연구는 벨 비고전성에 대한 연구에 비하여 초기단계에 있어, 관련 분야 내 많은 연구가 필요한 분야 중 하나이다.

본 논문에서는 네트워크 벨 비고전성과 관련한 중요 결과와 연구방법론을 삼각 네트워크(triangle network), 이중국소 네트워크(bilocal network)와 같이 기초적인 네트워크 형태에서 제안된 결과를 중심으로 살펴본다. 기초적인 형태의 네트워크를 주로 고려하는 이유는 해당 연구 분야가 앞서 언급한 바와 같이 초기 단계에 있어, 기초적인 네트워크에 대한 연구 결과가 상대적으로 많이 축적되어 있기 때문이며, 또한 그러한 기초적 네트워크에서 개선된 네트워크 부등식을 제안할 연구 필요성이 아직 존재하므로 이에 대한 동향을 집중적으로 분석하는 것이 중요하다고 판단하기 때문이다. 그 수가 많지는 않으나, 제안된 네트워크 부등식을 활용하여 실험을 통하여 네트워크 시나리오에서 비고전적 상관관계를 판별한 선도적인 실험 결과가 이미 보고된 점은 고무적이다.

본 논문은 다음과 같이 구성하였다. II-1절에서는 일반적인 네트워크 벨 시나리오를 소개한다. II-2절은 제안된 네트워크 벨 비고전성과 이를 유도하기 위한 방법론을 간략히 다룬다. III장 결론에서는 향후 남은 연구 방향에 대하여 간략히 정리한다.

### II. 본론

#### II-1. 네트워크 벨 시나리오

기존 벨 시나리오와 네트워크 벨 시나리오의 핵심적 차이는 기존 벨 시나리오는 1개의 상태원을 고려하는 반면 네트워크 시나리오에선 2개 이상의 독립적 상태원을 고려한다는 점이다. 상태원의 독립성은 오직 한 개 상태원을 가정하는 기존 벨 시나리오에서는 고려할 필요가 없던 부분이다. 기존 시나리오에서는 각 입자 간 과거 상호작용의 영향을 국소 숨은 변수(local hidden variable, LHV),  $\lambda$  로 기술한다. 반면, N개 입자와 s개 상태원을 고려하는 네트워크 시나리오에서는 독립된 다수의 국소 숨은 변수,  $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, s)$  를 활용하여, 상관관계를 다음과 같이 기술한다.

$$p(\mathbf{a}|\mathbf{x}) = \int_{\Lambda} \left( \prod_j d\lambda_j q_j(\lambda_j) \right) \prod_i p(a_i|x_i, \lambda_i)$$

위 상관관계 정의에서 적분은 모든 국소 숨은 변수  $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^s$  에 대한 적분이며, 벡터 변수  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  이며  $\lambda_i$  는 i번째 입자와 관련한 모든 국소 숨은 변수 모음이다.

벨 비고전성을 판별하기 위해서는 LHV 이론에 의한 상한값을 유도하기 위한 최적화가 필요하다. 네트워크 시나리오에서 LHV 이론에 의해 정의되는 영역을 분석할 때 기존 벨 시나리오와 같이 볼록 최적화(convex optimization) 기법을 활용할 수 없다는 점은 네트워크 벨 비고전성 분석을 기존 대비 어렵게 만든다.

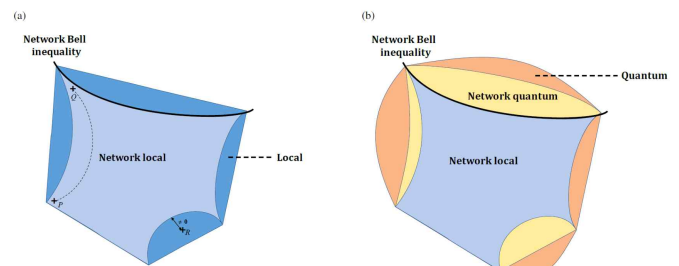


그림 1 LHV (그림 상 local) 상관관계 영역에 대한 개념도 [2]

2022년 출간된 네트워크 부등식에 관한 리뷰 논문 [2]에 포함된 위 개념도 (그림 1)에 네트워크 시나리오에서 LHV 상관관계 영역이 기존 벨 시나리오에서처럼 볼록 다면체 (convex polytope)가 되지 않는 점이 잘 나타나 있다. 네트워크 시나리오에서 LHV 영역은 이 밖에도 벨 LHV 영역에 포함되는 특성을 갖는다.

## II-2. 네트워크 벨 비고전성

본 절에서는 이중국소 네트워크와 삼각 네트워크를 중심으로 네트워크 벨 비고전성 판별 방법을 제안한 연구 결과를 선별하여 소개한다.

### i) 이중국소 네트워크 (bilocal network)

이중국소 시나리오에서는 아래 그림 2와 같이 Alice-Bob, Bob-Charlie 간 독립적으로 나누어 가진 상태에 대한 각 측정자의 측정을 고려한다. 필수 조건은 아니나, Bob은 모인 두 개 큐비트에 대하여 고정된 2체 측정을 수행하는 간단한 시나리오가 현재 많이 고려되고 있다.

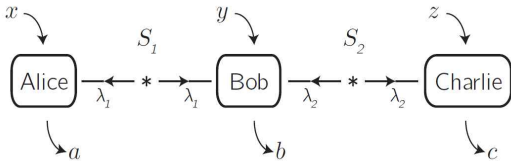


그림 2. 일반적인 이중국소 시나리오

이중국소 시나리오는 가장 간단한 네트워크 시나리오임에도 현재까지 적은 수의 네트워크 부등식이 제안되었으며, 그중 저자의 이름을 딴 BRGP와 [3] TGB [4] 부등식에 대하여 특기한다. 우선 BRGP 이중국소 부등식은 아래와 같이 표현된다 [2].

$$I_{BRGP} = \sqrt{I_+} + \sqrt{I_-} \leq 1$$

위 부등식에서  $I_+$ 와  $I_-$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$I_+ = \frac{1}{4} \sum_{a,b,c,x,z} (-1)^{a+b_0+c} p(a,b,c|x,z),$$

$$I_- = \frac{1}{4} \sum_{a,b,c,x,z} (-1)^{a+b_1+c} p(a,b,c|x,z)$$

Bob은 고정된 하나의 2체 측정을 수행하는 것을 가정하며, 그 측정값은 두 개 비트  $b = \{b_0, b_1\}$ 로 표현된다. 상태원( $S_1, S_2$ )은 벨 상태를 생성하고, Bob이 벨 상태 측정(Bell state measurement, BSM)을 수행할 때, 양자 위배가  $\sqrt{2}$ 를 얻을 수 있음이 알려져 있다.

BRGP 부등식 제안 이후 비교적 최근 유도된 TGB 상관관계 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$I_{TGB} = \frac{1}{3} \left( \sum_{y=z} \langle B^y C_z \rangle - \sum_{x=y} \langle A_x B^y \rangle \right) - \sum_{x \neq y \neq z} \langle A_x B^y C_z \rangle$$

위 상관관계의 상한값은 LHV 이론에 의해 3으로 주어진다. 이때 Bob은 BRGP와 마찬가지로 고정된 한개의 2체 측정을 수행한다. 변수  $y$ 가 Bob의 측정 선택이 아니라, 상관관계 계산 방식을 구분하는 변수라는 점을 유

의해야 한다. 적절한 양자 전략을 활용하면 TGB의 양자 위배  $I_{TGB} = 4$ 를 얻을 수 있다. 위 양자 위배를 얻기 위한 TGB의 양자 전략에서 Bob은 BRGP의 경우와 같이 BSM을 수행하지 않고, EJM(elegant joint measurement)을 [5] 수행한다는 점은 두 부등식 간의 큰 차이이다.

### ii) 삼각 네트워크 (triangle network)

이중국소 시나리오에 Alice와 Charlie 간 새로운 상태 분배를 추가로 더 하면, 삼각 네트워크 시나리오로 일반화된다. 이와 관련한 가장 중요한 연구 결과 중 하나는 삼중국소 (trilocal) 시나리오에서 제안된 연구 결과다 [2]. 삼중국소 시나리오에서 Alice, Bob, Charlie는 모두 정해진 한개의 측정을 고려하므로, 측정 선택을 위한 입력값은 존재하지 않는다. 이때 3개의 상태원에서 모두 벨 상태를 생성하고, 세 측정자가 동일하게 4개 상태,  $|01\rangle, |10\rangle, u|00\rangle + v|11\rangle, u|00\rangle - v|11\rangle$  ( $u^2 + v^2 = 1$ )를 측정요소로 갖는 측정을 수행할 때,  $u$ 가 특정 범위 내에서 정의되면 결과적으로 주어지는 양자 상관관계를 어떠한 삼중국소 모델도 만들 수 없다는 점이 증명된 바 있다 [6].

## III. 결론

본 논문에서 기초적인 형태의 네트워크에 대하여 제안된 네트워크 벨 비고전성 연구 동향에 대하여 매우 간략히 살펴보았다. 네트워크 벨 비고전성 분야에선 아직 많은 후속 연구가 필요하다. 우선, 이중국소, 삼각 네트워크에서도 최적화된 양자 위배를 보이는 양자 상관관계가 제안되지 않았으므로 이를 유도하는 연구가 아직 남아있다. 이를 위해선 벨 비고전성을 분석하기 위한 효과적인 방법론과 이론적 구조에 대한 연구가 필요하다. 이에 더하여 기존 연구를 보다 일반화된 네트워크 형태, 고차원 또는 다체계로 일반화된 상태의 경우에 대하여 유확장하는 연구 및 네트워크 벨 비고전성에 기반하여 DI 양자암호 프로토콜을 제안하는 문제도 향후 연구 방향으로 고려할 수 있을 것이다.

## ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 2025년도 한국과학기술정보연구원(KISTI) 주요 사업 과제로 수행한 것입니다.

## 참 고 문 헌

- [1] Stephanie, W. et al., "Quantum internet: A vision for the road ahead," Science 362, eaam9288, 2018
- [2] Tavakoli, A. et al., "Bell nonlocality in networks," Rep. Prog. Phys. 85 056001, 2022.
- [3] Branciard, C., et al., "Bilocal versus nonbilocal correlations in entanglement-swapping experiments," Phys. Rev. A 85, 032119, 2012.
- [4] Tavakoli, A. et al., "Bilocal Bell Inequalities Violated by the Quantum Elegant Joint Measurement," Phys. Rev. Lett. 126, 220401, 2021.
- [5] Gisin, N., "Entanglement 25 Years after Quantum Teleportation: Testing Joint Measurements in Quantum Networks," Entropy 21, 325, 2019..
- [6] Renou, M.-O. et al., "Genuine Quantum Nonlocality in the Triangle Network," Phys. Rev. Lett. 123, 140401, 2019.