

# 짧은 부호 길이에서의 최소거리 상한과 복호 임계값을 활용한 PBRL LDPC 부호 설계

정홍재, 김재원

경상국립대학교

ghdwo2875@gnu.ac.kr, jaewon07.kim@gnu.ac.kr

## Design of PBRL LDPC Codes Using Minimum Distance Upper Bound and Decoding Threshold for Short Codelength

Hong-Jae Jeong, Jae-Won Kim

Gyeongsang National Univ.

### 요약

본 논문은 짧은 부호 길이에서 최소거리(minimum distance,  $d_{\min}$ ) 상한(upper bound) 지표의 한계를 확인하고, 이를 보완하기 위해 최소거리 상한을 보조 기준으로 두면서 복호 임계값(decoding threshold)을 주 설계 기준으로 프로토타입 기반 래터 유사(protograph-based Raptor-like, PBRL) 저밀도 패리티 검사(low-density parity-check, LDPC) 부호를 설계한다. 해당 방식은 최소거리 상한을 소폭 희생하더라도 복호 임계값을 개선함으로써, 천공(puncturing) 유무에 관계없이 프레임 오류율(frame error rate, FER)을 개선하였다.

### I. 서론

디지털 정보의 전송과 저장 과정에서 발생하는 오류를 탐지하고 정정하기 위해 다양한 오류정정부호(error correcting code, ECC)가 제안되어 왔으며, 그중 저밀도 패리티 검사(low-density parity-check, LDPC) 부호는 샤논 한계(Shannon limit)에 근접하는 성능과 낮은 복호 복잡도를 바탕으로 IEEE 802.11n, DVB-S2 같은 Wi-Fi 및 위성 방송 표준에서 널리 사용되고 있다. 한편, 차세대 통신시스템은 환경 변동성과 실시간 통신 등을 배경으로 고신뢰성과 저지연을 동시에 요구한다. 이러한 요구를 충족하기 위해 저밀도 패리티 검사 부호는 부호율 호환(rate-compatible) 구조로 설계되어, 하드웨어 구현을 용이하게 하고 신뢰도 요구와 채널 상태에 따라 전송률을 유연하게 조정한다. 이에 5G New Radio (NR)에서도 부호율 호환 구조의 저밀도 패리티 검사 부호가 채택되어, URLLC (Ultra-Reliable and Low-Latency Communications), mMTC (massive Machine Type Communications) 등과 같이 다양한 시나리오에 대응하고 있다.

저지연이 요구되는 시스템에서는 일반적으로 짧은 부호 길이가 사용된다. 하지만 짧은 부호 길이에서는 그래프 내 작은 사이클(cycle)과 정지 집합(stopping set)과 같은 구조적 문제로 오류 마루(error floor) 현상이 빈번히 발생하여 부호의 복호 성능이 저하된다[1]. 이를 완화하기 위해 선행 연구[2]는 최소거리(minimum distance,  $d_{\min}$ ) 상한(upper bound)을 최대화하도록 점진적 중복 부호(incremental redundancy code, IRC)를 단계적으로 추가하여 프로토타입 기반 래터 유사(protograph-based Raptor-like, PBRL) 저밀도 패리티 검사 부호를 설계하였고, 전반적인 프레임 오류율(frame error rate, FER) 개선을 달성하였다. 하지만 일부 경우에는 최소거리 상한이 큰 부호보다 복호 임계값(decoding threshold)이 더 낮은 부호가 실제 복호 성능에서 우수한 결과를 보였다. 최소거리 상한은 이론적 지표에 불과하여 확장(lifting)을 통해 생성된 부호가 해당

상한을 항상 달성하지 못하기 때문이다. 이에 본 논문에서는 복호 임계값을 주 지표로 사용되던 최소거리 상한을 함께 고려하여 PBRL 저밀도 패리티 검사 부호를 설계하고, 선행 연구에서 제안된 부호와 비교하여 우수성을 검증한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 PBRL 저밀도 패리티 검사 부호 및 복호 임계값 기반 탐색 알고리즘을 설명하고, 이에 대한 실험 결과를 보인다. III장에서는 결론을 맺는다.

### II. 본론

#### 1. PBRL LDPC 부호

프로토타입은 검사(check) 노드들과 변수(variable) 노드들로 이루어진 이분 그래프이며, 노드들과의 중복 연결이 허용되고 복사와 순열 작업을 통해 더 큰 그래프로 확장 가능하다. 검사 노드의 수를  $n_c$ , 변수 노드의 수를  $n_v$ 라 할 때 확장 계수가  $z$ 라면 확장된 그래프는  $zn_c \times zn_v$  크기를 가진다.

PBRL 저밀도 패리티 검사 부호는 기존의 부호 구조를 유지한 채 부호율  $R$ 을 단계적으로 조절할 수 있는 부호율 호환 구조를 지니며 행렬 구조는 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} H_{\text{HRC}} & 0 \\ H_{\text{IRC}} & I \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$H_{\text{HRC}}$  (highest rate code)는 가장 높은 부호율을 가지는 부분 행렬이고,  $H_{\text{IRC}}$ 는  $H_{\text{HRC}}$  아래에 행 단위로 추가되어 부호율을 점진적으로 감소시키는 부분 행렬이다. 0과  $I$ 는 각각 영행렬(zero matrix)과 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

#### 2. 최소거리 상한을 고려한 복호 임계값 기반 탐색 알고리즘

선행 연구는 가산성 백색 가우시안 잡음(additive white Gaussian noise, AWGN) 채널 하에서 최소거리 상한을 최대화하는 방향으로 PBRL 저밀도 패리티 검사 부호를 설계하였다. IRC는 탐욕적(greedy) 방식으로 추가되었으며, IRC의 각 행에 대해 다음과 같은 제약 조건을 두었다.

1) 노드 간의 중복 연결 미허용

2) 검사 노드들의 차수 합을 3으로 제한

3) 천공(puncturing)이 적용된 변수 노드는 항상 검사 노드와 연결  
선행 연구에서 제안된 부호들은 최소거리 상한이 커짐에 따라 오류 마루 현상이 완화되었으며, 전반적으로 복호 임계값 기반 최적화 부호보다 우수한 FER 성능을 보였다. 하지만 최소거리 상한은 이론적 값에 불과하여, 리프팅 후 부호의 최소거리를 보장하지는 않기에 최소거리 상한이 높더라도 복호 임계값이 더 낮은 부호의 FER 성능이 우수한 경우도 존재하였다. 이에 본 논문에서는 복호 임계값을 주 설계 기준으로 하되, 최소거리 상한의 효과를 수용하여 이를 보조 기준으로 하는 방식으로 PBRL 저밀도 패리티 검사 부호를 설계한다. 구체적으로, 각 단계에서 선행 연구와 동일한 제약 조건 하에 IRC 후보 행을 생성한 뒤 모든 후보에 대해 프로토타입 외부 정보 전송(protograph extrinsic information transfer, PEXIT)[3] 기반 복호 임계값과 영구식(permanent)[2] 기반 최소거리 상한을 계산한다. 후보 행 중 복호 임계값이 가장 낮은 후보를 선택하되, 허용 오차 내 복호 임계값이 동일한 다른 후보가 존재한다면 최소거리 상한이 더 큰 후보를 선택한다. 최종 선택된 후보는  $H_{IRC}$ 의 신규 행으로 추가되며, 이 절차를 목표 부호율에 도달할 때까지 반복한다. 초기 입력이 되는  $H_{HRC}$ 는 차수가 2인 변수 노드끼리의 루프(loop) 금지 및 엔트리(entry)의 상한 값을 2로 제한한 상태에서 무작위로 생성하여 사용되었다. 천공 유무에 따라 해당 알고리즘을 적용하여 PBRL 저밀도 패리티 검사 부호를 설계하였으며, 선행 연구에서 제안된 부호와의 비교 분석은 II-3절 실험 결과에서 다룬다.

### 3. 실험 결과

선행 연구에서 제안된 부호를  $P_{NP}$  (non-punctured),  $P_P$  (punctured)로, 본 논문에서 설계한 부호는  $P_{NP}^{proposed}$ ,  $P_P^{proposed}$ 로 표기한다. 복호 성능 비교를 위해 모든 부호는 ACE (approximate cycle extrinsic message degree)-PEG (progressive-edge-growth)로 확장하여, 부호 길이  $N=495$ 로 설정되었다. 또한 복호기는 합-곱 알고리즘으로 구성하였고 복호 반복 수는 100으로 진행되었다.

실험 결과로 얻어진 성능 측정에 따르면 천공이 없는 경우, 최소거리 상한이 7 낮아졌음에도 복호 임계값에서는 0.061 dB 개선을 보였고, 복호 성능에서는 FER 곡선의 기울기 손실 없이  $10^{-6}$  영역에서 약 0.2 dB 성능

능 이득을 달성하였다. 해당 결과는 표 1과 그림 1을 통해 확인할 수 있으며, 천공이 존재하는 경우에서도 동일한 경향이 확인되었다. 최소거리 상한에서 2의 손실이 있지만, 복호 임계값이 0.032 dB 개선됨에 따라  $10^{-6}$  영역에서 약 0.1 dB 성능 이득을 달성하였다. 결과적으로, 천공 여부와 관계없이 최소거리 상한과 복호 임계값을 모두 고려하여 설계된 부호가 선행 연구보다 우수한 FER 성능을 보였으며, 최소거리 상한을 일정 이상 보장한다면 짧은 부호 길이에서도 복호 임계값이 여전히 유효한 지표임을 확인할 수 있다.

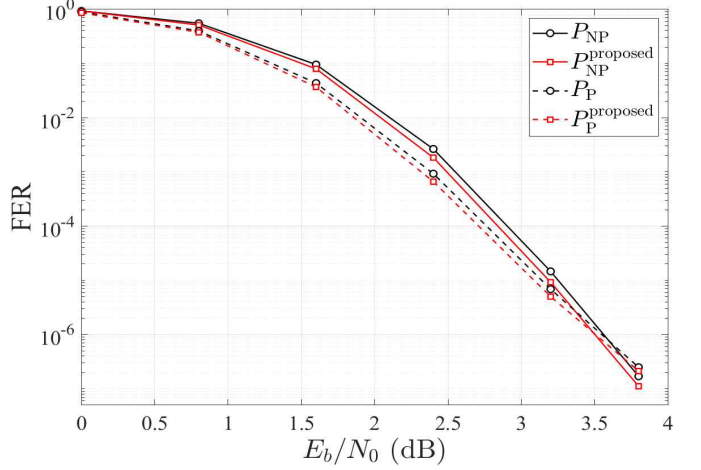


그림 1.  $R=0.4$ , 복호 반복 수 100에서  $P_{NP}$ ,  $P_{NP}^{proposed}$ ,  $P_P$ ,  $P_P^{proposed}$  부호의 FER 성능

### III. 결론

본 논문은 짧은 부호 길이에서 복호 임계값을 주 설계 지표, 최소거리 상한을 보조 설계 지표로 하여 PBRL 저밀도 패리티 검사 부호를 설계하였고, 천공 유무와 관계없이 최소거리 상한 최대화 중심의 부호 대비 일관적인 FER 개선을 확인하였다. 향후에는 HRC 고정 시나리오와 다양한 부호율 구간에서의 비교를 통해 해당 알고리즘의 유효성과 일반성을 추가 검증할 예정이다.

### ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원·학·석사연계 ICT핵심인재양성 지원을 받아 수행되었습니다(IITP-2025-RS-2022-00156409).

본 연구는 한국연구재단을 통해 미래창조과학부의 미래유망 융합기술 파이오니어사업으로부터 지원받아 수행되었습니다(RS-2022-NR067569).

### 참고 문헌

- [1] C. Di, D. Proietti, I. E. Telatar, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "Finite-length analysis of low-density parity-check codes on the binary erasure channel," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 48, no. 6, pp. 1570 - 1579, Jun. 2002.
- [2] S. V. S. Ranganathan, D. Divsalar, and R. D. Wesel, "Quasi-cyclic protograph-based raptor-like LDPC codes for short block-lengths," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 65, no. 6, pp. 3758 - 3777, Jun. 2019.
- [3] G. Liva and M. Chiani, "Protograph LDPC codes design based on EXIT analysis," in *Proc. IEEE GLOBECOM*, pp. 3250-3254, Washington, DC, USA, Nov. 2007.

표 1.  $R=0.4$ , 복호 반복 수 100에서  $P_{NP}$ ,  $P_{NP}^{proposed}$ ,  $P_P$ ,  $P_P^{proposed}$  부호의 기본 크기, 복호 임계값, 최소거리 상한

Code	Base size	Threshold $E_b/N_0$ (dB)	$d_{min}$ upper bound
$P_{NP}$	$9 \times 15$	0.6817	40
$P_{NP}^{proposed}$	$9 \times 15$	0.6204	33
$P_P$	$10 \times 16$	0.4489	36
$P_P^{proposed}$	$10 \times 16$	0.4161	34