

확률기하학과 동적시스템 분석을 통한 Walker 성좌 위성 시스템에 관한 연구

최창식

한국과학기술원

changsik@kaist.ac.kr

요약. 저궤도(LEO)와 중궤도(MEO) 위성 네트워크는 여러 개의 궤도면과 다수의 위성으로 구성된다. 대표적인 구조인 *Walker Constellation*(이하 *Walker* 성좌)은 궤도의 경도와 위성의 위치가 균등하게 배치된 형태이다. 본 논문에서는 이러한 *Walker* 성좌를 확률기하학(*Stochastic Geometry*) 관점에서 모델링하였다. 제안된 모델에 동적시스템 이론을 적용해 성좌의 주기성(*periodicity*)과 에르고딕성(*ergodicity*) 등 구조적 특성을 분석하였으며, 특정 위도에서의 하향통신 성능을 주요 파라미터에 따라 평가하였다.

I. 서론

저궤도(LEO)와 중궤도(MEO) 위성 네트워크는 데이터 통신, 센싱, 인터넷 라우팅 등 다양한 응용을 지원하도록 설계된다. 이러한 위성들은 일정한 궤도 위에 배치되며, 궤도의 기하 구조가 위성의 위치와 운동을 결정한다. 실제 네트워크는 (i) 궤도 경도를 적도 위에 균등하게 분포시키고, (ii) 각 궤도 내 위성을 균등하게 배치함으로써 최대 커버리지를 달성하도록 설계되며, 이를 *Walker* 성좌라 한다. 지상 관측자 입장에서는 이러한 규칙적 구조가 위성 궤적의 주기적(*ephemeris*) 특성을 유도한다고 가정하지만, 실제로 그러한지 여부는 명확하지 않다.

최근 확률기하학이 위성의 공간 분포를 수학적으로 모델링하는 주요 도구로 활용되고 있다. 최근 위성을 구면상 균등 분포된 확률점으로 간주하는 이항 혹은 포아송 포인트프로세스를 보완하기 위해 궤도 분포와 궤도 내 위성 분포를 함께 고려한 Cox 포인트프로세스가 제안되었으나 [2], 대부분 등방(isotropic) 구조를 가정하여 *Walker* 성좌의 비등방성 특성이나 동적 시스템적 성질 즉 그 주기성(*periodicity*)이나 에르고딕성(*ergodicity*)을 분석하기 어렵다.

본 연구에서는 *Walker* 성좌 내 위성의 위치를 표현하기 위한 확률기하학적 프레임워크를 개발한다. 제안된 프레임워크는 궤도 경사각 ϕ , 궤도 수 N_o , 궤도당 위성 수 N_s , 사용자 위도 l_u 등 주요 매개변수에 의해 결정되는 비등방(non-isotropic) 네트워크 구조를 특징으로 한다. 이를 바탕으로 위성 통신 성능에 핵심적인 통계적 지표들을 도출한다.

먼저, 제안된 모델이 시간에 대해 불변한 분포 특성을 가짐을 보인다. 그리고, 모델이 주기적 또는 에르고딕적 거동을 보이는 정확한 해석적 조건을 규명하였다. 또한 사용자가 가장 가까운 위성과 연결된다고 가정할 때, 전형적(typical) 사용자와 연결 위성 간의 거리 분포를 궤도 경사각, 궤도 수, 위성 수, 사용자 위도의 함수로 도출하였다. 또한, 전형적 사용자에서의 총 신호 총량의 라플라스 변환을 보인다.

II. 본론

본 논문에서는 지구 중심을 원점으로 하는 3차원 공간을 고려한다. 기준 좌표계는 지구의 자전에 따라 함께 회전하므로, 지상 고정점의 좌표는 일정하게 유지된다. xy-평면은 적도면, x축은 경도 기준축, z축은 북극 방향이다. 사용자는 반지름 6371 km인 지구 표면 위에 임의로 분포한다고 가정한다. 모든 위성 궤도는 원형이며, 지구의 자전과는 독립적으로 동일한 방향으로 일정 속도로 회전한다.

주어진 시각에서 궤도의 상승점(ascending point)은 궤도가 적도면과 교차하는 지점이며, 위성이 남반구에서 북반구로 통과하는 위치이다. 궤도의 경도는 x축으로부터 상승점까지의 각도, 궤도 경사각은 상승점에서 궤도면이 적도면과 이루는 각도로 정의하며, 시간에 따라 변하지 않는다. 위성의 위상(phase)은 해당 궤도면 상에서 상승점과 위성 간의 각도로 정의한다.

궤도 수를 N_o , 궤도당 위성 수를 N_s 라 할 때, 궤도의 경도는 구간에 균등하게 분포한다고 가정한다. 시간 0에서 균등분포 $\bar{\theta} \sim \text{Uniform}(0, 2\pi/N_o)$ 에 따른 랜덤 오프셋을 더하면, i-번째 궤도의 상승점 경도는 $\theta_i = 2\pi/N_o + \bar{\theta} \bmod 2\pi$ 로 주어진다. 동일한 $\bar{\theta}$

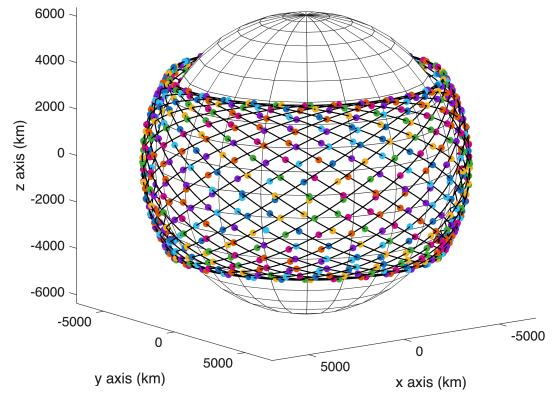


Fig. 1. 주어진 *Walker* 성좌. $N_o = 30$, $N_s = 30$, $\phi = 33$ deg.

가 모든 궤도에 적용되므로, 궤도 분포는 지구의 자전에 대해 회전 불변성을 갖는다. 모든 궤도의 경사각은 ϕ 이며, 시간 0에서의 궤도 집합은 $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{N_o} l_i = \bigcup_{i=1}^{N_o} l(\theta_i, \phi)$ 로 정의된다.

각 궤도 내 위성들은 위상 $\omega_j = 2\pi j/N_s + \bar{\omega} \bmod 2\pi$ 로 균등하게 배치되며, $\bar{\omega} \sim \text{Uniform}(0, 2\pi/N_s)$ 은 모든 위성에 동일하게 적용된다. 따라서 시간 0에서의 위성 포인트프로세스은 $\Psi = \sum_{i=1}^{N_o} \sum_{j=1}^{N_s} \delta_{X_{i,j}}$ 로 표현된다. 여기서 $X_{i,j}$ 는 i번째 궤도의 j번째 위성의 위치이다.

각 위성의 좌표 (x, y, z) 는

$$x = r \sqrt{\cos^2(\omega_j) + \sin^2(\omega_j) \cos^2(\phi)} \cos(\hat{\theta}_j + \theta_i),$$
$$y = r \sqrt{\cos^2(\omega_j) + \sin^2(\omega_j) \cos^2(\phi)} \sin(\hat{\theta}_j + \theta_i),$$
$$z = r \sin(\omega_j) \sin(\phi)$$

으로 주어지며, $\hat{\theta}_j = \text{atan2}(\sin(\omega_j) \cos(\phi), \cos(\omega_j))$ 이다. 제안된 모델은 *Walker-delta* 성좌를 확률기하학 프레임워크를 활용하여 표현한 모델이며, 위성 간 상대 위상이 0일 때 *Walker* ($\phi : N_o N_s / N_o / 0$) 성좌와 일치한다. 이 모델은 모든 회전에 대해 분포가 불변한 이항 또는 등방 Cox 포인트프로세스 모델과 달리, 사용자 위도에 따라 서로 다른 위성 분포를 제공한다. 따라서 사용자의 위도에 따라 네트워크 성능이 달라지는 특성을 반영한다. 일반적 사용자는 경도 0, 위도 l_u 에 위치한다고 가정하며, $\vec{u} = (e \cos(l_u), 0, e \sin(l_u))$ 로 표현된다.

네트워크 성능 분석을 위해 모든 위성이 동일한 자원을 사용하고, 사용자는 가장 가까운 위성과 연결된다고 가정한다. 수신 전력은 거리 $d > 1$ 일 때 $pG(d)Hd^{-\alpha}$ 로 주어지며, 여기서 p 는 기준 전력, $G(d)$ 는 안테나 이득, H 는 페이딩 랜덤 변수이다. 안테나 이득은 $d \leq d_g$ 일 때 $G(d) = g_t g_r$, $d > d_g$ 일 때 $G(d) = g_r$ 로 두며, $\mathbf{E}[H] = 1$ 이다.

A. 불변 확률 분포 혹은 메ASURE(*Invariant Probability Measure*)

\bar{Q} 를 두 개의 균등분포의 곱으로 정의하며, 그 정의역은 $S = [0, \frac{2\pi}{N_o}] \times [0, \frac{2\pi}{N_s}]$ 이다. \bar{Q}_Ψ 는 $(\bar{\theta}, \bar{\omega})$ 가 \bar{Q} 를 따를 때, 시간 0에서의 Ψ 의 분포를 의미한다.

정리 1. 확률측도 \bar{Q} 는 R_t 에 대해 불변이며, \bar{Q}_Ψ 는 Ψ_t 에 대해 불변이다.

증명. 첫 번째 증명만 증명하면 충분하다. $\mathbb{T}[0, a] \times [0, b]$ 를 $[0, a] \times [0, b]$ 에서 정의된 토러스라고 하자.

⁰ 해당 논문은 [1]을 기반으로 한국어로 작성하였음. 자세한 증명 및 기타 정리들에 대해서는 [1] 참조.

$\theta = \bar{\theta} \frac{N_o}{2\pi}$, $\omega = \bar{\omega} \frac{N_s}{2\pi}$ 라 하고, $\theta_t = \bar{\theta} t \frac{N_o}{2\pi}$, $\omega_t = \bar{\omega} t \frac{N_s}{2\pi}$ 로 정의한다. (θ_t, ω_t) 를 $(\bar{\theta}t, \bar{\omega}t)$ 로 변환하는 선형사상을 g 라 하자. 이때 측정 가능한 흐름은 $\alpha_t(\theta, \omega) = (\theta_0 - v_\theta t \bmod 1, \omega_0 + v_\omega t \bmod 1)$ 으로 표현된다. 여기서 $v_\theta = \bar{v}_\theta \frac{N_o}{2\pi}$, $v_\omega = \bar{v}_\omega \frac{N_s}{2\pi}$ 이다.

\bar{Q} 가 $\bar{\alpha}t(\bar{\theta}, \bar{\omega}) = (\bar{\theta} - \bar{v}_\theta t \bmod \frac{2\pi}{N_o}, \bar{\omega} + \bar{v}_\omega t \bmod \frac{2\pi}{N_s})$ 에 대해 불변이려면, $[0, 1]$ 위의 두 균등분포의 곱으로 정의된 Q 가 $\alpha_t(\theta, \omega)$ 에 대해 불변이면 충분하다. 따라서 모든 $(v_\theta, v_\omega) \neq (0, 0)$ 에 대해 \bar{Q} 는 α_t 에 대해 불변이다 [3].

B. 시스템의 주기성과 에르고딕성

먼저 회전 속도의 비를 $\rho = \bar{v}_\theta / \bar{v}_\omega$ 로 정의하자.

정리 2. ρ 가 무리수이면, 동적 시스템 R_t (또는 Ψ_t)는 각각 S (또는 N_r) 위에서 최소적(minimal)이고, \bar{Q} (또는 \bar{Q}_Ψ)에 대해 에르고딕적이다. 반면 ρ 가 유리수이면, 두 시스템은 모두 주기적이다.

증명. R_t 에 대한 증명만 보이면 충분하다. $\hat{\rho} = v_\theta / v_\omega$ 라 하자. $\hat{\rho}$ 가 무리수이면, $\mathbb{T}([0, 1], [0, 1])$ 위의 시스템 α_t 는 Q 에 대해 최소이자 에르고딕이다. 반대로 $\hat{\rho}$ 가 유리수이면 α_t 는 주기적이며, 따라서 Q 에 대해 에르고딕이지 않다.

논의 1. 비주기적 경우의 시간 평균

ρ 가 무리수인 경우, 지상 고정 사용자가 관찰하는 성좌는 주기적이지 않다. 대신 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\Psi_t(x)) dt = \int h(\psi) \bar{Q}\Psi(d\psi)$ 가 성립하며, 이는 \bar{Q} -거의 모든 x 에 (almost everywhere w.r.t. \bar{Q}) 대해 성립한다. 즉, 시간 평균은 불변 분포 \bar{Q}_Ψ 에 대한 기댓값과 같다. 예를 들어, h 는 사용자의 위치 (x, y, z) 에서의 SINR로 정의할 수 있다. 이 경우, 무한 시간에 대한 시간 평균은 불변 분포에 대한 기대값과 같다.

반면 ρ 가 유리수이면 시스템은 주기적이며, 시간 평균은 일반적으로 불변분포에 대한 평균과 일치하지 않는다. 따라서 지상 사용자가 위치한 (x_1, y_1, z_1) 에 따라 위성 패턴이 주기적으로 반복되지만, 사용자 위치에 따라 그 구조가 달라질 수 있다.

C. 성능 분석: 가장 가까운 위성까지의 거리

반지름이 r 인 구면을 \mathbb{S} 라 하자. $r - e < d < \sqrt{r^2 - e^2}$ 일 때, 위도 l_u 의 전형적 사용자 u 에 대해 거리 d 이내의 구면 상 영역을 $\mathbb{S}_u(d) = \{x, y, z) \in \mathbb{S} \mid |(x, y, z) - \vec{u}| \leq d\}$ 로 정의한다. 특히 $\mathbb{S}_u(\sqrt{r^2 - e^2})$ 는 사용자가 볼 수 있는 가시 영역(visible spherical cap)으로, 이를 간단히 \mathbb{S}_u 로 표기한다.

l_u 위도에서 전형적 사용자와 가장 가까운 위성 간의 거리를 $D(l_u)$ 라 정의하며, 사용자가 볼 수 있는 위성이 없을 경우 $D(l_u) = \infty$ 로 둔다.

정리 3. $r - e < d < \sqrt{r^2 - e^2}$ 일 때, $D(l_u)$ 의 Complementary CDF(CCDF), $\mathbf{P}(D(l_u) > d)$ 는 다음과 같다:

$$\zeta \int_0^{\frac{2\pi}{N_o}} \int_0^{\frac{2\pi}{N_s}} \mathbb{1} \left\{ \frac{r^2 + e^2 - d^2}{2re} \max \frac{\vec{X}_{i,j} \cdot \vec{u}}{\|\vec{X}_{i,j}\| \|\vec{u}\|} \right\} d\omega d\theta, \quad (1)$$

여기서 $\vec{X}_{i,j}$ 는 정의된 위성 좌표이며, $\zeta = N_o N_s / (4\pi^2)$ 이다.

증명. $\mathbb{1}x$ 를 사건 x 가 참일 때 1, 거짓일 때 0을 갖는 표시함수라 하자. $(\bar{\theta}, \bar{\omega})$ 가 주어졌을 때, 전형적 사용자와 가장 가까운 위성 간 거리의 조건부 확률, $\mathbf{P}(D(l_u) > d \mid \bar{\theta}, \bar{\omega})$, 은

$$\mathbb{1} \left\{ \kappa < \min_{(i,j)} \left\{ \arccos \left(\frac{\vec{X}_{i,j} \cdot \vec{u}}{\|\vec{X}_{i,j}\| \|\vec{u}\|} \right) \right\} \right\},$$

이다. 여기서 $(i, j) \in ([N_o], [N_s])$ 는 $i = 1, \dots, N_o$, $j = 1, \dots, N_s$ 를 의미한다. 이는 사용자가 보는 구면캡 $\mathbb{S}_u(d)$ 의 경계 각 $\kappa = \arccos \left(\frac{e^2 + r^2 - d^2}{2re} \right)$ 보다 모든 위성의 중심각이 크면, 해당 구면캡 내에 위성이 없음을 의미한다. 따라서, 위의 수식을 정리하면 해당 정리를 얻을 수 있다.

논의 2. 임계 거리의 존재

위성 배치가 결정론적(deterministic)으로 이루어져 있기 때문에, 위도 l_u 가 일정 임계값 L 보다 작고 N_o, N_s 가 충분히 클 경우, 상수 $d_c(l_u) \leq \sqrt{r^2 - e^2}$ 가 존재하여 $\mathbf{P}[r - e \leq D(l_u) < d_c(l_u)] = 1$ 이 성립한다. 예를 들어, $N_o = 30$, $N_s = 50$ 인 경우 $d_c(l_u) \approx 775$ km이며, 이는 전형적 사용자의 연결 거리가 항상 775 km 이하임을 의미한다. 이 성질은 하향 통신의 최대 경로 손실과 직접적으로 연결되므로, 성능 하한을 유도하는 데 유용하다. 특히 이 임계 거리의 존재는 제안된 네트워크가 콕스 포인트프로세스 모델 [2]과 달리

정규 격자형 구조의 위성 배치를 따르기 때문이다. 격자형으로 점이 배치된 경우, (전형적 유저가 위성을 볼 수 있는 위도에 존재할 때) 위성 까지의 거리가 어느 한계를 넘어가면 항상 위성을 만나게 된다.

D. 성능분석: 신호-간섭 전력의 총합

전형적 사용자가 수신하는 신호-간섭 전력의 총합(total signal-plus-interference power), T , 을 유도한다.

정리 4. 전형적 사용자의 신호-간섭 전력의 총합 T 의 라플라스는

$$k \int_0^{\frac{2\pi}{N_o}} \int_0^{\frac{2\pi}{N_s}} \exp \left(\sum c_{i,j} \log \left(\mathcal{L}_H \left(\frac{s p G_{i,j}}{\|X_{i,j} - u\|^\alpha} \right) \right) \right) d\bar{\omega} d\bar{\theta},$$

여기서 $c_{i,j} = \mathbb{1} \left\{ \frac{\vec{X}_{i,j} \cdot \vec{u}}{\|\vec{X}_{i,j}\| \|\vec{u}\|} \geq \frac{e}{r} \right\}$ 이고, \mathcal{L}_H 는 H 의 라플라스 변환,

$$G_{i,j} = \begin{cases} g_t g_r, & \text{만약 } \frac{\vec{X}_{i,j} \cdot \vec{u}}{\|\vec{X}_{i,j}\| \|\vec{u}\|} \geq \frac{r^2 + e^2 - d_g^2}{2re}, \\ g_r, & \text{아니면.} \end{cases}$$

증명. [1] 을 참조한다.

논의 3. 해당 연구에서 우리는 임의의 네트워크 성능 요소(performance metric)가 에르고딕인지 아닌지 수학적으로 명백히 확인할 뿐 아니라, 기존에 사용되었던 시뮬레이션 방법에 대비하였을 때 해당 요소의 계산을 직접적으로 도울 수 있다는 장점 또한 가지고 있다. 더 나아가, 만약 성좌가 주기적인 경우, 시뮬레이션 방법으로는 시간 윈도우를 활용하여 네트워크의 성능 요소를 분석할 수 있는데, 이 경우 얼마나 큰 윈도우를 활용해야 참 값에 가까워지는지 사전에 알 수 없다. 그러나, 해당 논문의 결과를 활용한다면, 비주기적이고 에르고딕일 때 불변 확률 분포를 활용하여 네트워크 성능 요소의 평균적인 특성을 분명히 파악할 수 있다.

논의 4. ρ 가 무리수인 경우, Walker 성좌는 에르고딕 시스템이다. 따라서 Walker 성좌로부터 파생된 모든 랜덤 팩터(factor)들 또한 에르고딕 시스템이다. 즉, 해당 Walker 성좌의 확률 요소끼리의 결합, 혹은 주어진 동역학에 대해서 에르고딕성을 가지는 독립적인 확률 분포의 합성(예를 들면 지표면 위의 임의의 점)으로 나타난 새로운 요소들 또한 에르고딕 시스템이다. 예를 들어 Walker 성좌의 포인트를 점으로 하는 어떤 그래프가 존재한다고 하자. 해당 랜덤 그래프는 Walker 성좌의 포인트의 결합이고 또한 해당 랜덤 그래프는 따라서 ρ 값에 따라 주기성 혹은 에르고딕성이 결정된다. Walker로부터 파생된 랜덤 팩터와 이러한 랜덤 팩터의 통계적 특성에 대한 자세한 연구는 추후 연구한다.

III. 결론

본 논문에서는 Walker 성좌를 확률기하학 관점에서 모델링하였다. 이를 통해 제안된 동적 시스템의 시간 불변성을 규명하고, 주기성과 에르고딕성 등 구조적 특성을 수학적으로 증명하였다. 이후, 궤도 수(N_o), 궤도당 위성 수(N_s), 궤도 경사각(ϕ), 사용자 위도(l_u) 등 주요 매개변수를 기반으로 전형적 사용자의 하향 통신 성능을 유도하였다.

제안된 프레임워크는 네트워크 변수 간의 상호작용을 분석적으로 파악할 수 있는 체계적인 방법을 제공할 뿐만 아니라, LEO 위성 네트워크 설계 및 최적화를 위한 직관적이고 실용적인 도구를 제시한다. 특히 이 프레임워크를 통해 성좌의 기하 구조와 동적 특성이 통신 성능에 미치는 영향을 체계적으로 이해할 수 있으며, 성좌 설계 시 각 변수(궤도 경사, 위성 배치, 위상 오프셋 등)의 조정이 네트워크 성능에 미치는 영향을 직접적으로 평가할 수 있다.

REFERENCES

- C.-S. Choi and F. Baccelli, "Stochastic geometry and dynamical system analysis of walker satellite constellations," *early access. IEEE Trans. Veh. Technol.*, pp. 1–6, 2025.
- , "A novel analytical model for LEO and MEO satellite networks based on Cox point processes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 73, no. 4, pp. 2265–2279, 2025.
- A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, 3rd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997.