

# 루프드 함수법을 이용한 Chaotic Lur'e 시스템에서의 동적 이벤트-트리거 동기화 문제

김영재, 이찬우, 권오민\*

충북대학교

cel2020@cbnu.ac.kr, \*madwind@cbnu.ac.kr

## Event-triggered synchronization for Chaotic Lur'e system using looped-functional approach under

Yeong-Jae Kim, Chan-Woo Lee, Oh-Min Kwon\*

Chungbuk national Univ.

### 요약

본 논문은 chaotic Lur'e 시스템에서의 이벤트-트리거 동기화 문제에 대해 다룬다. 통신은 비주기적으로 이루어지며, 동기화를 위하여 적절한 루프드 함수를 설계, 여러 수학적 기법을 사용하여 안정화 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 제안하였다. 상황에 맞게 제어기의 성능을 조절할 수 있게 튜닝 파라미터를 이용하였으며, 이벤트-트리거 메커니즘을 통하여 데이터의 전송량을 감소, 즉 통신의 부담을 감소시켰다. 마지막으로 제안한 제어기의 유효함을 보이기 위하여 수치 예제를 통하여 검증하였다.

## I. 서 론

이벤트-트리거 제어는 시스템의 상태 변화에 따라 제어 신호를 보내는 방식으로 데이터의 전송량을 감소시켜 네트워크의 부하를 줄일 수 있다는 장점이 있다.[1-3] 제어기 설계를 위하여 시간 지연 접근법, 루프드 함수 접근법 등 다양한 방법이 있으며, 이에 대해 다양한 방식으로 연구되고 있다.[3] 추가로 하드웨어의 한계 혹은 데이터의 손실로 인하여 비주기적으로 데이터를 받아오는 경우가 발생하며 이를 고려한 연구도 진행되고 있으나, 아직까지는 연구자 대다수가 이론을 토대로 연구하며 실험을 통한 검증까지는 이루어지고 있지 않다.

본 논문에서는 비주기 통신을 하고 있는 chaotic Lur'e 시스템 간 이벤트-트리거 동기화에 대해 다루고 있으며, 제어기 설계를 위하여 루프드 함수 접근법을 이용하였고 wirtinger-based integral inequality[4]와 영등식 등을 활용하여 선형 행렬 부등식의 형태로 안정화 조건을 유도하였다. 마지막으로 제안한 안정화 조건을 통해 얻은 동기화 이득을 이용하여 수치 예제에서 안정함을 보였으며 이벤트-트리거 제어를 통하여 데이터 전송량을 감소함을 볼 수 있다.

## II. 본론

### 2.1 문제 설정

비주기 통신을 하고 있는 마스터-슬레이브 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{m}(t) = Am(t) + Bf(Cm(t)), \quad (1)$$

$$\dot{s}(t) = As(t) + Bf(Cs(t)) + u(t), \quad (2)$$

$$u(t) = LC(m(t_{\kappa(l)}) - s(t_{\kappa(l)})). \quad (3)$$

여기서  $m(t), s(t) \in R^n$ 는 각각 마스터와 슬레이브 시스템의 상태이며,  $f(\cdot)$ 는  $k_i^- \leq (f_i(x(u)) - f_i(x(v))) / (u - v) \leq k_i^+$ 을 만족하는 비선형 벡터,  $u(t) \in R^m$ 는 동기화 입력 벡터,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times l}$ ,  $C \in R^{l \times n}$ 는 시스템 행렬,  $L \in R^{m \times l}$ 은 동기화 이득이다.  $t_k$ 는 k번째 샘플링이며,  $T_k$ 는 샘플링 간격으로  $T_1 \leq t_{k+1} - t_k = T_k$

$\leq T_2$ 의 조건을 만족한다. 그리고  $t_{\kappa(l)}$ 는 마지막으로 이벤트가 발생한 시간이다. 그리고 이벤트-트리거 조건으로 양행렬  $\Phi \in R^{n \times n}$ 에 대하여  $[x(t_{\kappa(l)}) - x(t_k)]^T \Phi [x(t_{\kappa(l)}) - x(t_k)] \leq \alpha x^T(t_{\kappa(l)}) \Phi x(t_{\kappa(l)}) \quad (4)$ 을 만족하면 센서에서 제어기로 신호를 보내고, 만족하지 못한다면 신호를 보내지 않는다.[2]

시스템의 오차를  $x(t) = m(t) - s(t)$ 로 정의하면 시스템을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(Cx(t)) - LCx(t_{\kappa(l)}). \quad (5)$$

보조 정리[3] Wirtinger-based integral inequality

### 2.2 주요 결과

이 절에서는 시스템 (5)에 대한 이벤트-트리거 동기화 문제를 다루며 다음의 행렬 표현을 정의한다.

$$e_i = [0_{n \times (i-1)n}, I_n, 0_{n \times ((6-i)n+m)}]^T \in R^{(5n+m) \times n}, i = 1, \dots, 5,$$

$$e_6 = [0_{m \times 5n}, I_m], e_0 = 0_{11n \times n},$$

$$\eta_k = t - t_k, \eta_{k+1} = t_{k+1} - t,$$

$$\zeta^T(t) = \left\{ x^T(t), x^T(t_k), x^T(t_{\kappa(l)}), \dot{x}^T(t), \frac{1}{\eta_k} \int_{t_k}^t x(s) ds, f(Cx(t)) \right\},$$

$$\Pi_1 = e_1 - e_2, \Pi_2 = -e_1 - e_2 + 2e_5, \Pi_3 = [e_2, e_3, e_5],$$

$$\Xi_{1[T_k]} = Sym \{ e_1 P e_4^T - \Pi_1 F_1 - \Pi_2 F_2$$

$$- \Pi_1 (Q_1 \Pi_1^T + Q_2 [e_1, e_2, e_3]^T) \\ + (e_6 - e_1 C K^-) L_1 C e_4^T + (e_1 C^T K^+ - e_6) L_2 C e_4^T$$

$$- (e_6 - e_1 C^T K^-) U (e_6 - e_1 C^T K^+)^T$$

$$+ (e_1 + \delta_1 e_3 + \delta_2 e_4) (X A e_1^T + X B e_6^T - Y C e_3^T - X e_4^T) \}$$

$$- [e_2, e_3] \begin{bmatrix} \Phi & -\Phi \\ -\Phi & (1-\alpha)\Phi \end{bmatrix} [e_2, e_3]^T - T_k \Pi_3 S \Pi_3^T,$$

$$\Xi_2 = Sym \{ e_4 (Q_1 \Pi_1^T + Q_2 [e_1, e_2, e_3]^T) \}$$

$$+ \Pi_1 (Q_1 e_4^T + Q_2 [e_4, e_0, e_0]^T)$$

$$+ \Pi_3 S [e_0, e_0, e_1 - e_5]^T \} + 2 \Pi_3 S \Pi_3^T + e_4 R e_4^T. \quad (6)$$

**정리 1.** 양의 스칼라  $\delta_1, \delta_2, T_1, T_2, \alpha, K^-, K^+$ 가 주어지고 다음의 양한정 행렬  $P, Q, \Phi \in R^{n \times n}$ 와 대칭 행렬  $S \in R^{3n \times 3n}$ , 그리고 임의 행렬  $Q_1, X \in R^{n \times n}, Q_2 \in R^{n \times 3n}, Y \in R^{m \times n}, F_1, F_2 \in R^{n \times (5n+m)}$ , 대각 행렬  $U \in R^{m \times m}, L_1, L_2 \in R^{l \times l}$ 이 다음의 LMI를 만족하면 시스템 (5)는 점근적으로 안정하다.

$$\Phi > 0, \Xi_{1[T_1]} + T_1 \Xi_2 < 0, \Xi_{1[T_2]} + T_2 \Xi_2 < 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{1[T_1]} & T_1 F_1^T & T_1 F_2^T \\ \star & -T_1 R & 0_{n \times n} \\ \star & \star & -3T_1 R \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Xi_{1[T_2]} & T_2 F_1^T & T_2 F_2^T \\ \star & -T_2 R & 0_{n \times n} \\ \star & \star & -3T_2 R \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

여기서, 동기화 이득은  $L = X^{-1}Y$ 이다.

**증명.** 다음의 Lyapunov function과 루프드 함수를 고려한다.

$$V(t) = x^T(t) \bar{P} x(t) + 2\eta_{k+1}(x(t) - x(t_k))^T \times \left( \bar{Q}_1(x(t) - x(t_k)) + \bar{Q}_2 \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_k) \\ x(t_{\kappa(l)}) \end{bmatrix} \right) + \eta_k \eta_{k+1} \left[ \frac{x(t_k)}{x(t_{\kappa(l)})} \right]^T \bar{S} \left[ \frac{x(t_k)}{x(t_{\kappa(l)})} \right] + \eta_k \eta_{k+1} \left[ \frac{1}{\eta_k} \int_{t_k}^t x(s) ds \right] \bar{S} \left[ \frac{1}{\eta_k} \int_{t_k}^t x(s) ds \right] + \eta_{k+1} \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) \bar{R} \dot{x}(s) ds + 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{C_i} l_{1i} (f_i(s) - k_i^- s) + l_{2i} (k_i^+ s - f_i(s)) ds. \quad (9)$$

시스템 (5)로부터 다음의 영등식을 얻을 수 있다.

$$0 = 2(x^T(t) + X_1 x^T(t_{\kappa(l)}) + X_2 \dot{x}^T(t)) \times (-\dot{x}(t) + Ax(t) + Bf(Dx(t)) - Lx(t_{\kappa(l)})). \quad (10)$$

그리고 함수  $f(\bullet)$ 의 조건을 통해 다음을 얻을 수 있다.

$$0 \leq -2[f(Cx(t)) - K^- Cx(t)]^T U [f(Cx(t)) - K^+ Cx(t)]. \quad (11)$$

$\dot{V}(t)$ 에 식 (4)의 조건과 식 (9)-(10)을 더한 뒤  $X_1 = \delta_1 X, X_2 = \delta_2 X, KX = Y$ 일 때, 양변에  $X^{-1}$ 을 곱해주고 schur complement를 해주면 LMI (7)-(8)를 얻을 수 있으며, 자세한 증명과정은 생략한다.

### 2.3 수치 예제

다음과 같이 chaotic Lur'e 시스템을 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix} -1.2857 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.28 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3.8571 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = I_3, K^- = 0, K^+ = 1, f(x(t)) = \frac{1}{2}(|x_1(t)+1|-|x_1(t)-1|).$$

정리 1을 통하여  $\delta_1 = \delta_2 = 0.5, T_1 = 0.001, T_2 = 0.1, \alpha = 0.3$  일 때 다음의 동기화 이득을 얻을 수 있다.

$$L = \begin{bmatrix} 2.9396 & 2.4844 & -1.1434 \\ 0.5029 & 0.1647 & 0.0890 \\ -0.8422 & -2.1063 & 3.2591 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1.4603 & 0.2276 & 0.3440 \\ 0.2276 & 1.8257 & -0.1418 \\ 0.3440 & -0.1418 & 1.2973 \end{bmatrix}.$$

그림 1은 순서대로 마스터의 상태벡터, 슬레이브의 상태벡터, 오차벡터, 샘플링 및 트리거 간격을 나타내었으며, 각 시스템의 초기 상태는 각각  $m(0) = [0.2 \ 0.3 \ 0.2], s(0) = [-0.3 \ -0.1 \ 0.4]$  이다.

그림 1을 통해 제안한 동기화 알고리즘을 통하여 얻은 이득을 사용하였을 때, 동기화가 안정적으로 이루어짐을 보였으며, 이벤트-트리거 동기화를 통하여 샘플링된 신호의 24.24%만 전송하였다.

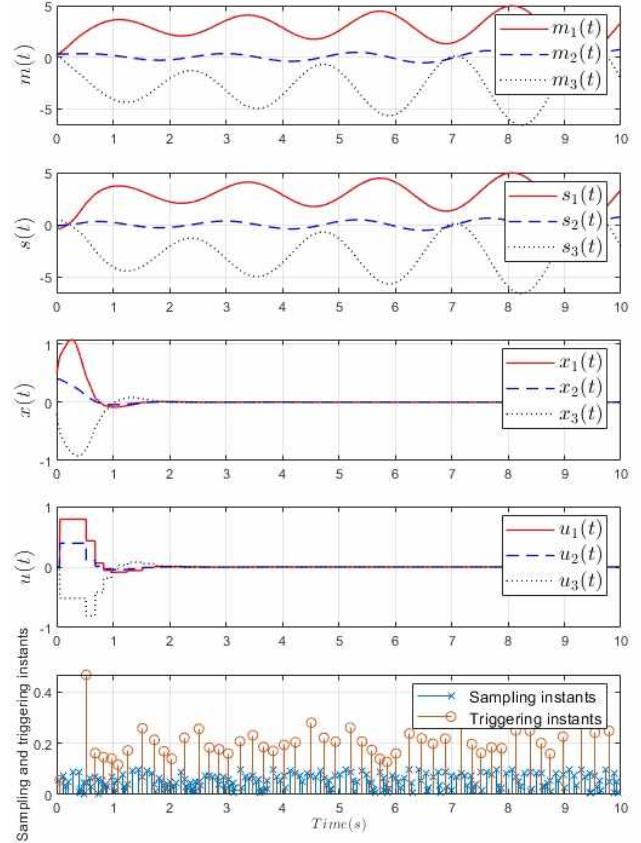


그림 1. 시스템의 각 상태 측정과 샘플링 및 트리거 간격

### III. 결론

본 논문에서는 비주기 통신을 하는 chaotic Lur'e 시스템에서 이벤트-트리거 동기화 문제에 대해 다루었다. 제어기를 설계하기 위하여 적절한 루프드 함수를 설계하였으며, 여러 수학적 기법을 사용하여 안정화 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 유도하였다. 제안한 방법을 통해 얻은 이득들을 이용하여 수치 예제에서 검증하였으며, 이를 통해 안정적으로 제어되고 데이터 전송량이 감소함을 보였다.

### ACKNOWLEDGMENT

본 논문은 교육부의 재원으로 한국연구재단(NRF-2020R1-A6 A1A12047945)과 과학기술정보통신부의 재원으로 정보통신기획평가원(IITP-2024-2020-0-01462,50%)에서 지원받아 연구하였음.

### 참 고 문 헌

- [1] K.-E. Åarzén." A simple event-based PID controller," IFAC Proceedings Volumes, vol. 32(2), pp. 129–132, 1999.
- [2] D. Yue, E. Tian, and Q.-L. Han. "A Delay System Method for Designing Event-Triggered Controllers of Networked Control Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 58(2), pp. 475–481, 2013.
- [3] A. Seuret, and F. Gouaisbaut. "Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems," Automatica, vol. 49, pp. 2860–2866, 2013.