

큐비트 자원 절감 CCZ 매직 상태 공장

국성연, 허준*

고려대학교

viviangood@korea.ac.kr, *junheo@korea.ac.kr

Qubit Resource Reduction CCZ Magic State Factory

Kook Sung Yeon, Heo Jun*

Korea Univ.

요 약

본 논문은 결함 허용 양자 컴퓨터의 논리적 연산에 필수적인 매직 상태 중, CCZ 매직 상태 공장의 큐비트를 절감하는 방법과 공장의 형태를 제시한다. 매직 상태 공장은 결함 허용 양자 컴퓨터의 큐비트 자원 소모의 상당량을 차지하므로, 본 논문에서 제시하는 방향성은 향후 대규모 양자 컴퓨터 활용에 기여할 수 있다.

I. 서 론

쇼어 알고리즘, 변분 양자 알고리즘 등 양자 알고리즘을 수행하기 위해, 궁극적 양자 컴퓨터는 결함 허용 양자 컴퓨터가 되어야 한다. 결함 허용 양자 컴퓨터는 양자 연산 수행 과정 중 오류가 발생하여도 오류를 탐색하고 수정하는 논리적 큐비트를 이용해 논리적 연산을 수행한다[1]. 논리적 Clifford 연산은 lattice surgery, 공동 측정[2]를 통해 구현할 수 있는 반면, Non-Clifford 연산의 경우 매직 상태라는 특별한 보조 상태를 필요로 한다. 매직 상태는 물리적 큐비트에 매직 상태 주입을 통해 처음 논리적 상태로 만들고[3], 이를 인코딩하고 연쇄시켜 더 신뢰도가 높은 논리적 상태로 만들어 준비시킨다. 이처럼 신뢰도가 낮은 매직 상태를 신뢰도가 높은 상태로 만드는 일련의 과정을 매직 상태 정제라고 하며, 가장 신뢰도가 높은 매직 상태를 반복적으로 출력하는 블록을 매직 상태 공장이라 한다.

본 논문에서는 결함 허용 양자 컴퓨터의 연산에서 상당한 양의 큐비트를 소모하는 CCZ 매직 상태 공장의 큐비트 자원을 절감하는 방법을 제시한다. 매직 상태 정제에서 시작하여 2 단계 연쇄를 거쳐 최종적으로 오류율 $O(p^4)$ 를 달성하여 양자 알고리즘 수행에 적합한 신뢰도를 달성한다.

II. 본론

1. CNOT-conjugate 규칙

$$\prod_i Z_{\theta_i(u_i)} = CX(U)^{-1} \left(\prod_i Z_{\theta_i(i)} \right) CX(U) \quad (1)$$

$$\prod_{0 \leq i < n} Z_i^{\theta_i} |Ue\rangle = \prod_{0 \leq i < n} e^{i2\theta_i(u \cdot e \bmod 2)} |Ue\rangle \quad (2)$$

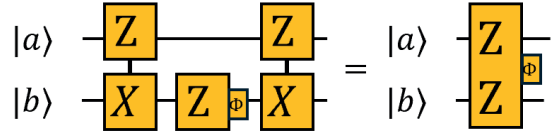


그림 1. CNOT-conjugate 규칙 예시

CNOT-회전 게이트-CNOT의 3개 게이트 연속은 1개의 회전 공동 측정으로 변환 가능하다. CNOT 게이트는 제어 큐비트가 1일 때만 타겟 큐비트에 X gate를 적용한다. CNOT 게이트가 적용된 1 상태에 Z 축의 위상 연산자를 적용하고 다시 CNOT 게이트를 함으로써 제어 큐비트에도 위상이 전파된다. 이는 두 큐비트를 동일한 Z 축의 위상 회전 측정된 것과 동일하다. 식(1,2)은 규칙의 수식적 표현이며 행렬적으로도 증명 가능하다.[7]

2. CCZ 매직 상태 정제

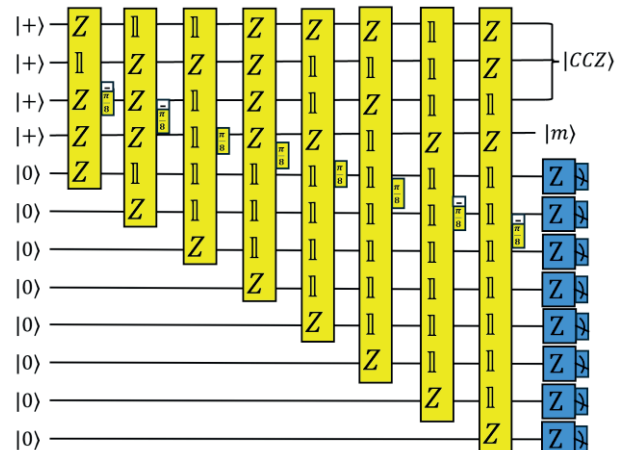


그림 2. 8-3-2 회로의 Z 축 공동 측정 변환

CNOT-conjugate 규칙을 이용하여 Jones[6]가 제시한 8-3-2 코드 활용 CCZ 매직 상태 회로를 변환하면 그림 2 과 같이 8 번의 공동 측정을 가진다. 또한, 초기 상태가 0 상태인 보조 큐비트 8 개는 Z 축 공동 측정과 Z 축 측정에서 상태 변화 없이 0 으로 측정되므로 이는 생략할 수 있다. 따라서 회로의 보조 큐비트를 줄이고 그림 3 의 큐비트 4 개를 사용하는 회로로 큐비트를 절감할 수 있다.

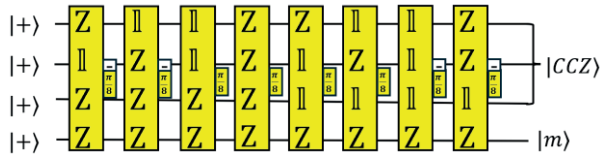


그림 3. 보조 큐비트 절감 CCZ 매직 상태 정제 회로

3. 매직 상태 블록

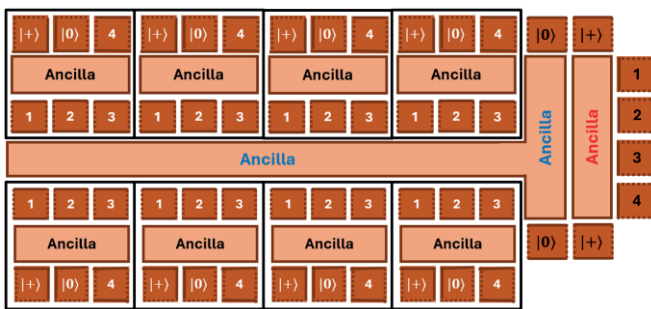


그림 4. CCZ 매직 상태 공장

그림 3 의 회로를 이용해 CCZ 매직 상태를 만드는 방법은 논리적 큐비트를 패치 단위로 인코딩하여 패치 단위의 공동 측정을 수행하는 것이다. 본 논문에서는 논리적 큐비트 인코딩의 양자 오류 정정 부호를 표면 부호로 가정한다[4].

그림 4 의 검정색 사각형은 1 단계 CCZ 매직 상태 증류 블록이다. 1,2,3,4 패치는 그림 3 회로의 4 개 논리적 상태를 위부터 순서대로 나타낸 것이다. + 상태와 0 상태는 공동 측정에 필요한 보조 큐비트로, [4]에서 각 보조 큐비트는 2 개 타일을 사용하지만, [8]의 4-qubit twist ZY 측정 기법을 이용하여 ZY 측정에서 사용되는 타일 수를 절감하였다.

그림 3 의 CCZ 정제 회로가 8 번의 표면 부호 사이클을 통해 생성되기 때문에, 1 회의 사이클에 1 개의 CCZ 매직 상태를 출력하기 위해선 8 개의 1 단계 증류 블록이 필요하다. 파란색 보조 큐비트는 1 단계 증류 블록의 출력을 2 단계 증류 블록으로 이동시키기 위해 필요하다. 빨간색 보조 큐비트는 2 단계 증류 블록의 공동 측정을 위해 필요한 보조 큐비트이다. 가장 오른쪽의 1,2,3,4 큐비트는 2 단계 연쇄로 최종 생성된 CCZ 매직 상태로, 오류율 $O(p^2)$ 의 높은 신뢰도를 가진다.

III. 결론

본 논문에서는 Non-Clifford 연산을 위해 필수적인 CCZ 매직 상태 생성에 필요한 큐비트 자원을 절감하는 방법을 제시하였다. CCZ 매직 상태는 T 매직 상태를 이용해 3 개 큐비트 이상의 Multi-qubit 연산을 생성하는 것에 비해 자원의 이득이 크기에, 대규모 양자 알고리즘에 필수적이며, CCZ 매직 상태를 지속적으로 출력하는 매직 상태 공장의 자원 최적화 연구는 중요하다. 설계한 매직 상태 공장의 출력 매직상태

신뢰도/비신뢰도를 오류율에 따른 수식으로 나타내고 이를 그래프로 비교하며, T 상태 기반 매직 상태의 성능과 비교, 분석을 진행할 예정이다.[5]

ACKNOWLEDGMENT

본 연구 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2020-0-00014, 결합허용 논리양자큐비트 환경을 제공하는 양자운영체제 원천기술 개발). 이 논문은 2025 년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2022-0-00463, 양자인터넷 구현을 위한 유선 양자중계기 개발)

참 고 문 헌

- [1] Fowler, A. G., Mariantoni, M., Martinis, J. M., & Cleland, A. N. (2012). Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 86(3), 032324.
- [2] Horsman, D., Fowler, A. G., Devitt, S., & Van Meter, R. (2012). Surface code quantum computing by lattice surgery. *New Journal of Physics*, 14(12), 123011.
- [3] Lao, L., & Criger, B. (2022, May). Magic state injection on the rotated surface code. In *Proceedings of the 19th ACM International Conference on Computing Frontiers* (pp. 113-120).
- [4] Litinski, Daniel. "A game of surface codes: Large-scale quantum computing with lattice surgery." *Quantum* 3 (2019): 128.
- [5] Gidney, Craig, and Austin G. Fowler. "Efficient magic state factories with a catalyzed $|CCZ\rangle$ to $2|T\rangle$ transformation." *Quantum* 3 (2019): 135.
- [6] Jones, Cody. "Low-overhead constructions for the fault-tolerant Toffoli gate." *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 87.2 (2013): 022328.
- [7] Fazio, Nicholas, Mark Webster, and Zhenyu Cai. "Low-overhead magic state circuits with transversal CNOTs (2025)." *arXiv preprint arXiv:2501.10291*.
- [8] Kang, Yujin, et al. "Fault-tolerant quantum computation using low-cost joint measurements." *Quantum Information Processing* 23.5 (2024): 190