

연접 부호를 적용한 단일 논리 큐비트의 공간 비용 감소 기법

강유진, 정유신, 국성연, 허준*

고려대학교

yujin20@korea.ac.kr, jeongys604@korea.ac.kr, vivianguood@korea.ac.kr, *junheo@korea.ac.kr

Reducing the space cost of single logical qubit using a concatenated code

Kang Yu Jin, Chung Youshin, Kook Sungyeon, Heo Jun*
Korea Univ.

요 약

본 논문은 표면 부호와 $[[5,1,3]]$ 부호를 연접하여 사용하여 표면 부호의 낮은 부호율을 보완하였다. 부호 거리를 3 배 증가시키기 위해 표면 부호만을 사용한 경우 큐비트 개수가 9 배 증가하지만, 제안 방식은 $[[5,1,3]]$ 부호 인코딩 시간에 따른 시간 비용이 증가하였지만 5 배의 논리 큐비트와 논리 연산을 위한 Ancilla 큐비트 1 개를 사용하므로 22.2% 더 적은 큐비트만으로 구현하였다.

I. 서 론

초전도 큐비트, 이온 트랩 큐비트 등을 사용한 양자 프로세서에서는 논리 큐비트를 만들기 위해 표면 부호(Surface code)를 사용하는데, 이는 표면 부호의 임계값(Threshold)이 매우 높을 뿐만 아니라 인접한 4 개의 큐비트 간의 연산만으로 신드롬 측정 및 논리 연산이 가능하다는 장점이 있기 때문이다[1].

그러나 표면 부호는 하나의 정보를 인코딩 하기 위해 많은 물리 큐비트를 요구하므로 부호율이 낮다는 단점이 있다. 예를 들어 부호 거리가 3 이면서 1 개의 정보를 표현하는 논리 큐비트를 제작하려면 최소 17 개의 물리 큐비트가 요구된다[2]. 따라서 qLDPC 와 같은 부호율이 높은 부호에 대한 연구도 진행되고 있으나 해당 부호는 인접 4 개 큐비트가 아닌 그 이상의 연결성이 요구되어 이를 해결하기 위한 연구가 진행되고 있다[3].

한편, Google 에서 2025년에 발표된 연구에 따르면, 표면 부호의 부호율을 보완하기 위해 연접 부호를 활용하였다[4]. 연접 부호는 논리 큐비트를 또 인코딩하는 단계를 거쳐 부호 거리를 증가시키는 방법으로 각 단계의 논리 큐비트를 1-level, 2-level 등으로 구분한다[5]. 해당 연구에서는 표면 부호가 아닌 다른 부호들을 활용하여 표면 부호의 거리를 증가시키면서 소요 큐비트를 감소시켰다. 이때 2-level 에 활용된 부호들은 인접 4 개 큐비트 이상의 연결성을 요구하나, 표면 부호의 논리 연산 기법인 Lattice surgery 를 활용하여 인접 연산들로 수행할 수 있다. 본 연구는 해당 연구에 제시된 기법을 활용하여 표면 부호와 CSS code 의 일종인 $[[5,1,3]]$ 부호를 연접하여 부호 거리를 증가시키고 공간 비용에 해당하는 소요 큐비트를 감소시킨다. 또한 논리 연산을 통한 2-level 인코딩 과정에 논리 큐비트 구조의 공간 비용을 최적화한다.

II. 본론

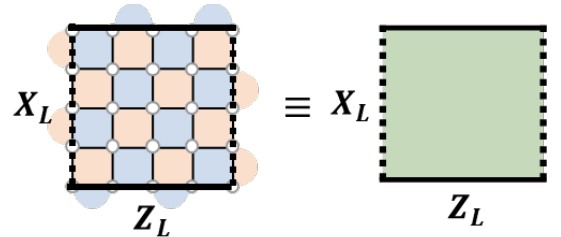


그림 1. 논리 큐비트를 Patch 로 표기한 예시 (부호 거리가 5 인 경우를 대상으로 하였으나 부호 거리는 다른 값으로 변경 가능)

그림 1 은 부호 거리 d 가 5 인 경우를 예시로 들어 논리 큐비트를 박스 형태인 Patch 로 나타낸 것이다. 왼쪽 그림에서 각 원은 물리 큐비트를 의미하며, 파란색 면은 X 안정자(Stabilizer)를, 주황색 면은 Z 안정자를 의미한다. 원으로 표기되지는 않았지만, 각 면에는 1 개의 신드롬 측정 큐비트가 존재한다. 논리 큐비트의 X boundary 에 존재하는 논리 Z 연산자(Z_L)는 굵은 실선으로 표기하였으며, Z boundary 에 존재하는 논리 X 연산자(X_L)는 굵은 점선으로 표기하였다. 해당 논리 큐비트는 오른쪽에 있는 연두색 박스로 대체하여 표기한다. 박스에서 실선과 점선은 각각 논리 Z 연산자와 논리 X 연산자를 의미한다. 부호 거리가 d 인 표면 부호의 소요 큐비트 개수는 $2d^2 - 1 \approx 2d^2$ 이다. 따라서 부호 거리가 5 인 해당 예시에서는 50 개의 큐비트가 사용된다. d 를 $3d$ 로 증가시키기 위해 표면 부호의 논리 Z 연산자와 논리 X 연산자의 길이(가로-세로 사이즈)를 키울 수 있다. 해당 경우에 소요 큐비트 개수는 $2 \cdot (9d^2) = 18d^2$ 로 9 배 증가한다.

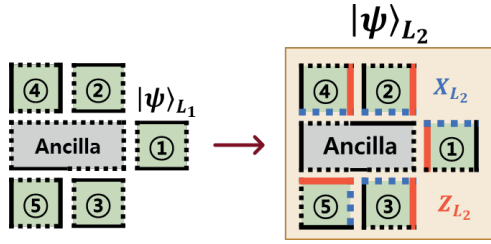


그림 2. 표면 부호와 $[[5,1,3]]$ 부호를 연결하여 생성된 2-level 논리 큐비트

본 논문은 [4]에 제시된 연결 아이디어에서 착안하여, 1-level 논리 큐비트는 부호 거리 d 인 표면 부호로 인코딩하고, 2-level 논리 큐비트는 부호 거리가 3 인 $[[5,1,3]]$ 부호로 인코딩하여 연결 부호를 통해 부호 거리를 증가시키는 방식을 제안한다. 그림 2 는 연결 부호를 통해 생성된 논리 큐비트를 나타낸 것이며, 연결 부호의 부호 거리는 각 level 의 부호 거리를 곱하여 계산되므로 2-level 논리 큐비트의 부호 거리는 $3d$ 이다. 표면 부호로 인코딩된 1 번 큐비트가 임의의 $|\psi\rangle_{L1}$ 상태를 가질 때, ancilla 를 포함한 5 개의 논리 큐비트 추가로 사용하여 $[[5,1,3]]$ 부호로 한번 더 인코딩 할 수 있다. 이때 생성된 2-level 논리 큐비트는 임의의 $|\psi\rangle_{L1}$ 와 동일한 정보를 지닌다. 2-level 의 논리 연산자는 1-level 의 논리 큐비트 마다 논리 X 연산을 하거나 논리 Z 연산을 하는 것으로 수행 가능하므로 2-level 의 논리 X 연산자와 논리 Z 연산자는 각각 굵은 파란색 점선과 굵은 빨간색 실선으로 표기하였다.

연접 부호의 소요 큐비트 개수는 다음과 같이 계산된다. 먼저, 표면 부호로 인코딩한 논리 큐비트는 5 개 사용하였기 때문에 $2 \cdot (5d^2) = 10d^2$ 의 큐비트를 소요한다. 이를 $[[5,1,3]]$ 부호의 안정자로 인코딩 하기 위해 $|+\rangle_L$ 상태의 ancilla 논리 큐비트를 추가로 활용하며 이는 2 개의 논리 큐비트에 해당하는 크기로 구성된다. Ancilla 논리 큐비트는 $2 \cdot (2d^2) = 4d^2$ 의 큐비트를 소요하므로, 전체 소요 큐비트는 둘을 더한 $14d^2$ 이다. 따라서 제안 방식을 사용하면, 표면 부호의 사이즈를 키워서 $18d^2$ 개의 큐비트를 소모하는 것보다 22.2% 더 적은 큐비트 만으로 부호 거리 $3d$ 를 지닌 논리 큐비트 1 개를 생성할 수 있다.

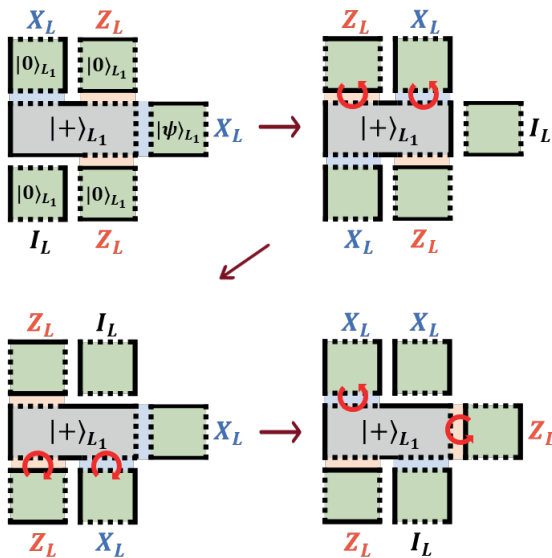


그림 3. 2-level 논리 큐비트의 $[[5,1,3]]$ 부호 인코딩 과정

그림 3 은 $[[5,1,3]]$ 부호의 안정자로 인코딩하는 과정을 [6]에 제시된 논리 큐비트 구조인 compact block 과 lattice surgery 기법을 사용하여 나타낸 것이다.

해당 block 은 가장 적은 공간 비용을 사용하며 모든 joint measurement 에는 $1d$ cycle 이 소요되나, 논리 큐비트의 X boundary 를 Z boundary 로 변경하는 boundary rotation 에는 추가 $3d$ cycle 이 소요된다.

각 과정을 살펴보면, 우선 1 번 patch 에 원하는 정보를 저장하고 2 번~5 번을 $|0\rangle_L$ 로 준비한다. 이후 $[[5,1,3]]$ 부호 안정자인 $\langle XXXI, IXZZ, XIXZ, ZXIX \rangle$ 로 사영하는 Joint measurement 를 수행한다. 사영 결과는 ancilla patch 를 X basis 로 측정하여 알 수 있다. 전체 과정은 4 번의 joint measurement 에 따른 $4d$ cycle 과 3 번의 rotation 에 $9d$ cycle 이 소요되어 총 $13d$ cycle 이 요구된다.

III. 결론

표면 부호의 낮은 부호율을 보완하기 위해 $[[5,1,3]]$ 부호와 연결하였으며, 2-level 인코딩에 lattice surgery 를 통한 joint measurement 를 사용하였다. Joint measurement 과정에는 [6]에 제시된 compact block 을 활용하여 공간 비용을 최소화하였다. 제안 기법은 부호 거리를 3 배 증가하는데 표면 부호의 사이즈를 키우는 방식보다 22.2% 더 적은 큐비트를 사용하였다. 대신, 시간 비용은 $13d$ cycle 이 추가로 소요되었다.

추후에는 [6]에 제시된 다른 block 활용하여 공간 비용을 추가하는 대신 시간 비용을 더 줄이거나, $[[5,1,3]]$ 부호가 아닌 다른 부호를 활용하여 부호율을 더 보완하는 연구를 고려할 수 있을 것이다.

ACKNOWLEDGMENT

본 연구 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2020-0-00014, 결합허용 논리양자큐비트 환경을 제공하는 양자운영체제 원천기술 개발). 이 논문은 2025 년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2022-0-00463, 양자인터넷 구현을 위한 유선 양자중계기 개발)

참 고 문 헌

- [1] Wang, David S., Austin G. Fowler, and Lloyd CL Hollenberg. "Surface code quantum computing with error rates over 1%." *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 83.2 (2011): 020302.
- [2] Tomita, Yu, and Krysta M. Svore. "Low-distance surface codes under realistic quantum noise." *Physical Review A* 90.6 (2014): 062320.
- [3] Panteleev, Pavel, and Gleb Kalachev. "Degenerate quantum LDPC codes with good finite length performance." *Quantum* 5 (2021): 585.
- [4] Gidney, Craig, et al. "Yoked surface codes." *Nature Communications* 16.1 (2025): 4498.
- [5] Devitt, Simon J., William J. Munro, and Kae Nemoto. "Quantum error correction for beginners." *Reports on Progress in Physics* 76.7 (2013): 076001.
- [6] Litinski, Daniel. "A game of surface codes: Large-scale quantum computing with lattice surgery." *Quantum* 3 (2019): 128.