

주파수 추정기를 이용한 복소 정현파 재구성 방법

도희동, 이남윤
고려대학교

{doheedong,namyoon}@korea.ac.kr

Reconstruction of complex sinusoid using frequency estimators

Do Heedong, Lee Namyoon
Korea Univ.

요약

본 논문에서는 주파수 추정 기법을 이용하여 정현파(sinusoid) 신호를 재구성하는 방법을 제안한다. 특히 Kay 가 제안한 추정기와 Lovell 과 Williamson 이 개선한 추정기를 고려하였고 컴퓨터 실험 결과를 통해 후자의 신호대잡음비(signal-to-noise ratio) 문턱(threshold)이 크게 낮음을 확인하였다.

I. 서론

주파수 추정 문제는 신호처리이론 및 추정이론에서 중요한 문제 중 하나로 정현파(sinusoid)에 잡음이 가해졌을 때 정현파의 주파수와 위상을 추정하는 문제다. 이는 도래각(angle-of-arrival) 추정 및 동기화(synchronization)에 활용될 수 있다. 이를 해결하기 위한 여러 추정기들이 개발되었다[1]-[2]. 추정된 파라미터들을 이용해 정현파를 재구성(reconstruction)할 수 있는데, 본 논문에서는 이러한 추정기들을 정현파 재구성 성능 관점에서 비교하고자 한다.

II. 본론

복소 백색 가우시안 잡음(complex white Gaussian noise)이 더해진 복소 정현파 신호는 다음과 같이 표현될 수 있다:

$$y(n) = \exp(j2\pi(fn + \phi)) + w(n), \quad (1)$$

여기서 $n = 0, 1, \dots, N-1$ 이고 f 는 주파수, ϕ 는 위상, N 은 신호의 길이를 나타낸다. 그리고 $w(n) \sim \mathcal{N}_c(0, \frac{1}{\text{SNR}})$ 은 복소 백색 가우시안 잡음이고 서로 다른 n 에 대해 독립적이며 SNR 은 신호대잡음비(signal-to-noise ratio, SNR)를 나타낸다.

본 논문에서는 $(y(0), \dots, y(N-1))$ 를 이용해 주파수와 위상을 추정하는 문제를 고려한다. [1]에서는 다음과 같은 추정기가 제안되었다:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\sum_{n=0}^{N-2} \frac{6(n+1)(N-n-1)}{N(N+1)(N-1)} y(n+1)\overline{y(n)} \right) \quad (2)$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \cdot y(n) \exp(-j2\pi fn) \right) \quad (3)$$

한편, [2]에서는 신호를 정규화(normalize)하여 [1]의 추정기를 개선하였다:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\sum_{n=0}^{N-2} \frac{6(n+1)(N-n-1)}{N(N+1)(N-1)} \cdot \frac{y(n+1)\overline{y(n)}}{|y(n+1)y(n)|} \right) \quad (4)$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \cdot \frac{y(n)}{|y(n)|} \exp(-j2\pi fn) \right) \quad (5)$$

추정된 주파수와 위상을 이용해 다음과 같이 정현파 신호를 재구성할 수 있다:

$$\exp(j2\pi(\hat{f}n + \hat{\phi})). \quad (6)$$

그림 1 과 그림 2 는 각각 [1]과 [2]의 추정기를 사용했을 때, 신호대잡음비에 따른 평균 제곱 오차(mean squared error, MSE), 즉

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| \exp(j2\pi(\hat{f}n + \hat{\phi})) - \exp(j2\pi(fn + \phi)) \right|^2, \quad (7)$$

을 나타낸다. 각 신호대잡음비마다 10,000 번의 시뮬레이션을 시행하였고 주파수와 위상은 단위 구간(unit interval) 위의 균일 분포(uniform distribution)로 생성되었다.

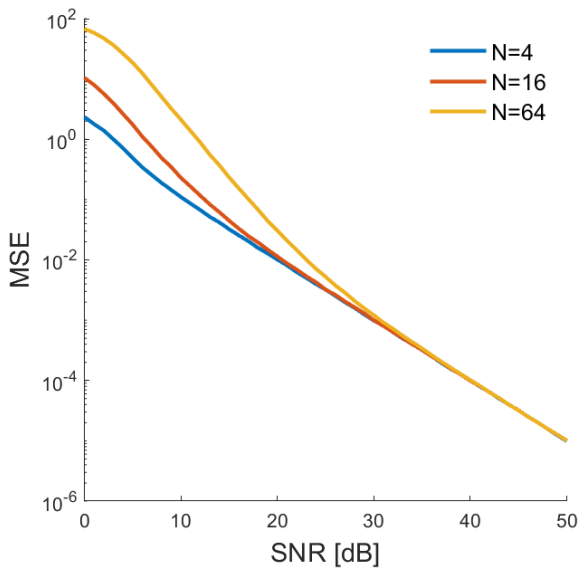


그림 1. [1]의 방법을 이용했을 때, 신호대잡음비에 따른 평균 제곱 오차.

두 추정기 모두 높은 신호대잡음비에서는 평균 제곱 오차 성능이 비슷하지만 신호대잡음비 문턱 (threshold)이 차이남을 확인할 수 있다.

III. 결론

본 논문에서는 Kay 가 제안한 추정기와 Lovell 과 Williamson 이 개선한 추정기의 성능을 신호 재구성 관점에서 비교하였다. 높은 신호대잡음비에서의 성능과 문턱에 대한 실험 결과들을 잘 설명하는 이론에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

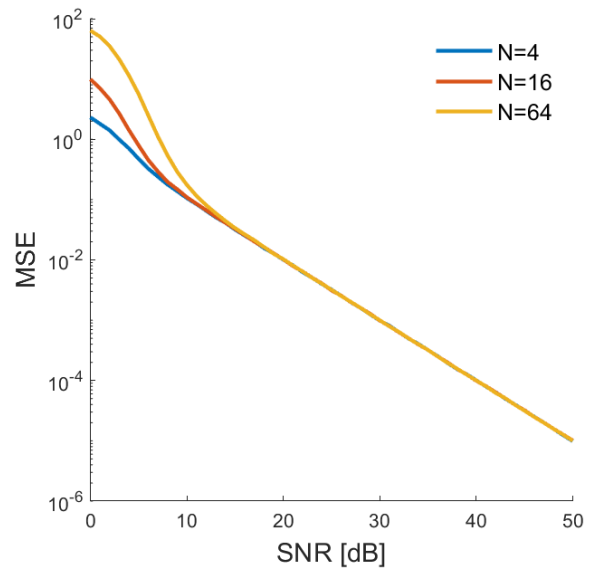


그림 2. [2]의 방법을 이용했을 때, 신호대잡음비에 따른 평균 제곱 오차.

참고 문헌

- [1] S. Kay, "A fast and accurate single frequency estimator," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. 37, no. 12, pp. 1987-1990, 1989.
- [2] B. C. Lovell and R. C. Williamson, "The statistical performance of some instantaneous frequency estimators," IEEE Trans. Signal Process., vol. 40, no. 7, pp. 1708-1723, 1992.