

# LEO-PNT 시스템 정수모호성을 고려한 Carrier-Phase 측위의 이론적 하한 분석

강정완, 김선우

한양대학교 융합전자공학부

{rkdwjddhks77, remero}@hanyang.ac.kr

## Analysis on Fundamental Performance Bounds for Carrier Phase Positioning with unknown Integer Ambiguity in LEO-PNT Systems

Jeongwan Kang and Sunwoo Kim

Department of Electronic Engineering, Hanyang University

### 요약

본 논문에서는 LEO(Low Earth Orbit)-PNT(Positioning, Navigation, and Timing) 시스템에서 정수모호성(integer ambiguity)이 주어지지 않았을 때 carrier-phase 측위의 이론적 하한인 크래머-라오 하한(Cramér-Rao lower bound, CRLB)을 유도/분석한다. Carrier-phase 및 Doppler의 측정 오류를 특성화하기 위해 FIM(Fisher information matrix)을 유도한다. 이를 carrier-phase 측위 및 Doppler 측위에 대한 CRB를 유도하고 이를 비교/분석한다. 시뮬레이션을 통하여 LEO-PNT 시스템에서 carrier-phase 측위가 Doppler 측위 대비 낮은 CRLB를 가지고 정수모호성이 커짐에 따라 CRLB가 감소함을 확인하였다.

### I. 서론

LEO(low earth orbit)-PNT(positioning, navigation, and timing)은 차세대 통신의 NTN(non-territorial network) 핵심 기술 중 하나로 각광받고 있다. GNSS(global navigation satellite systems)의 한계를 극복하기 위해 다수의 저궤도 위성을 활용하여 GNSS 대비 높은 수신신호세기 및 낮은 GDOP(geometric dilution of precision)로 보다 정확한 측위가 가능하다 [1]. [2]에서는 실제 Starlink 신호로 carrier-phase 측정값을 이용한 확장갈만필터 기반 측위 알고리즘이 제안되어 실제 운용가능성을 보여준 바 있다. [3]에서는 LEO-PNT에서 정수모호성(integer ambiguity) 값을 알 때 carrier-phase 측위의 이론적 하한을 분석하였다. 하지만, carrier-phase에서 정수모호성은 알 수 없으며, 이를 고려한 carrier-phase 측위의 이론적 하한 분석이 필수적이다. 본 논문은 LEO-PNT 시스템에서 정수모호성이 주어지지 않았을 때 carrier-phase 측위의 이론적 하한인 크래머-라오 하한(Cramér-Rao lower bound, CRLB)을 유도/분석한다. 시뮬레이션을 통하여 위성 개수 및 정수모호성에 따른 측위 CRLB를 비교/분석하였다.

### II. 시스템 모델

본 논문에서는  $L$ 개의 LEO 위성과 단일 수신기로 구성된 하향링크 LEO-PNT 시스템을 고려한다. 그림 1과 같이 수신기는  $L \geq 1$  LEO 위성의 커버리지에 고정되어 있다고 가정한다. 3차원 좌표를 고려하며, 수신기의 위치 및 속도 벡터는 각각  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$ ,  $\dot{\mathbf{p}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ 이며,  $\ell$ 번째 위성의 위치 및 속도 벡터는 각각  $\mathbf{p}_\ell = [x_\ell, y_\ell, z_\ell]^T$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_\ell = [\dot{x}_\ell, \dot{y}_\ell, \dot{z}_\ell]^T$ 이다.

단일 수신기는  $L$ 개의 LEO로부터 협대역에서 QPSK(quadrature phase shift keying) 변조된 신호신호를 수신하며 식은 아래와 같다.

$$r[k] = \sum_{\ell=1}^L s_\ell[k] + n[k], \quad k = 1, \dots, K \quad (1)$$

$n[k] \sim CN(0, N_0/2)$ 은 가우시안 노이즈이며  $\ell$ 번째 위성으로부터 수신받은 신호는 아래와 같다.

$$s_\ell[k] = \sqrt{P} g_\ell q_\ell \exp[j2\pi(f_c + f_{D,\ell})kT + j\phi_\ell] \quad (2)$$

$P$ 는 송신신호세기,  $g_\ell \in \mathbb{R}$ 은 채널 이득,  $q_\ell$ 는 QPSK 심볼,  $f_c$ 는 중심주

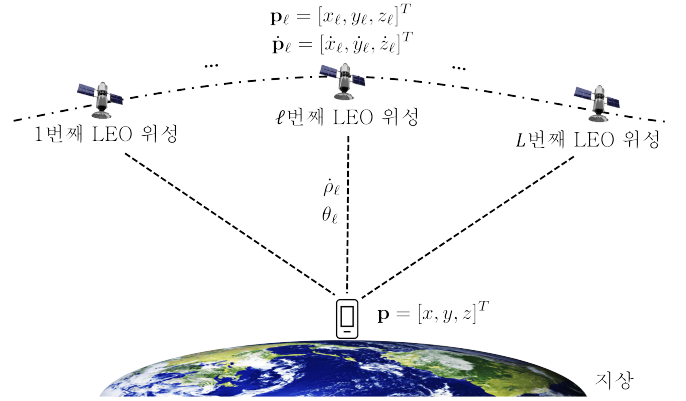


그림 1. LEO-PNT 시스템 carrier-phase 기반 측위 시나리오

파수,  $f_{D,\ell}$ 는  $\ell$ 번째 위성의 Doppler,  $\phi_\ell$ 은 carrier-phase이다.

Carrier-phase를 거리로 변환한  $\theta_\ell = \lambda\phi_\ell/2\pi$ 는 아래와 같다.

$$\theta_\ell = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_\ell\| + c\delta + c\beta_\ell + \lambda\epsilon_\ell + n_{\theta,\ell} \quad (3)$$

$\delta$ 는 시계바이어스,  $\beta_\ell$ 는 대기시간지연,  $\lambda$ 는 파장,  $\epsilon_\ell$ 는 정수모호성,  $n_{\theta,\ell} \sim N(0, \sigma_{\theta,\ell}^2)$ 은 가우시안 노이즈이다. 이 때, 모든 위성의 정수모호성은 동일하다고 가정한다 (i.e.,  $\epsilon_\ell = \epsilon \forall \ell$ ). Doppler로부터 추정된 의사거리 비율 (pseudo-range rate)  $\dot{\rho}_\ell = cf_{D,\ell}/f_c$ 은 아래와 같다.

$$\dot{\rho}_\ell = \frac{\dot{\mathbf{p}}_\ell^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_\ell)}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_\ell\|} + c\dot{\delta} + c\dot{\beta}_\ell + n_{\dot{\rho},\ell} \quad (4)$$

$\dot{\delta}$ 는 시계드리프트,  $\dot{\beta}_\ell$  대기시간지연율,  $n_{\dot{\rho},\ell} \sim CN(0, \sigma_{\dot{\rho},\ell}^2)$ 은 가우시안 노이즈이다. 이 때, 대기에 의한 시간지연은 미미하기 때문에 (3), (4)에서  $\{\beta_\ell, \dot{\beta}_\ell\}_{\ell=1}^L$ 은 무시된다.

### III. Carrier-Phase 측위 CRLB 유도

본 섹션에서는 측위 파라미터 (carrier-phase, Doppler)의 FIM을 유도하고 수신기의 위치 CRLB를 구한다. Carrier-Phase 측위는 LEO 위성의 이동성을 고려하여 두 측정모델 (carrier-phase 및 Doppler)를 모두 사용한다. 채널 파라미터 벡터는

$\boldsymbol{\eta}_{\text{ch}} = [\boldsymbol{\eta}_{\text{ch},1}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{\text{ch},L}]^T \in \mathbb{R}^{3L}$  이며, 각  $\ell$ 번째 위성의 채널 파라미터 벡터는 아래와 같이 carrier-phase, Doppler 및 실수채널이득으로 구성된다.

$$\boldsymbol{\eta}_{\text{ch},\ell} = [f_{D,\ell}, \phi_\ell, g_\ell]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta}_{\text{ch}}}$  은  $\boldsymbol{\eta}_{\text{ch}}$  의 FIM(Fisher Information Matrix)이며 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta}_{\text{ch}}} = \text{blkdiag}[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta}_{\text{ch},1}}, \dots, \mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta}_{\text{ch},L}}] \in \mathbb{R}^{3L \times 3L}, \quad (6)$$

$\text{blkdiag}[\cdot]$  는 블록대각화 (block diagonalization) 연산을 의미한다. 이때,  $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta}_{\text{ch},\ell}}$  은  $\ell$ 번째 위성의 채널파라미터에 대한 FIM(Fisher Information Matrix)이며 행렬 원소의 실수 부분을 나타내는 연산자  $\text{real}(\cdot)$  을 사용하여 다음과 같다.

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta}_{\text{ch},\ell} = \frac{2}{N_0} \text{real} \left\{ \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_\ell}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\text{ch},\ell}} \right)^H \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_\ell}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\text{ch},\ell}} \right) \right\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (7)$$

$\boldsymbol{\mu}_\ell \in \mathbb{R}^K$  은 (1)에서 노이즈가 제거된  $K$ 개의 신호가 정렬된 벡터이다. 이 때, 채널이득을 제외한 채널파라미터의 EFIM (equivalent FIM)은 아래와 같다.

$$\mathbf{J}_{e,\ell} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T \quad (8)$$

이 때, 행렬  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  그리고  $\mathbf{C}$  는 EFIM의 구성 행렬로 정의된다.

$$\mathbf{J}_{e,\ell} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (9)$$

측위 파라미터 벡터는 3차원위치, 정수모호성, 시계바이어스, 시계드립으로 구성된다.

$$\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{p}, \epsilon, \delta, \delta]^T \in \mathbb{R}^6 \quad (10)$$

이 때, 측위 파라미터 FIM은 채널 파라미터의 EFIM에 변환행렬  $\mathbf{T} = \partial \boldsymbol{\eta}_{\text{ch}} / \partial \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{3L \times 6}$  을 아래와 같이 연산하여 변환한다.

$$\mathbf{J}_\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T}^T \text{blkdiag}[\mathbf{J}_{e,1}, \dots, \mathbf{J}_{e,L}] \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (11)$$

이때, 단말 위치의 측위 CRLB는 아래와 같다.

$$\text{CRLB} = \sqrt{\text{tr}([\mathbf{J}_\boldsymbol{\eta}]^{-1})_{1:3,1:3}} \quad (10)$$

연산자  $\text{tr}(\cdot)$  을 대각합 (trace) 연산을 의미한다.

#### IV. 시뮬레이션 결과 및 분석

LEO 위성의 위치와 속도는 TLE (two-line element) 파일을 사용하여 생성되고 수신기는 한양대학교에 위치해 있다고 설정했다. 중심 주파수  $f_c$  는 11.325 GHz이고 QPSK 심볼 수  $K$  는 270이다. LEO 위성 수는 FoV(field of view)로 인해 4~32개 사이를 고려한다. 모든 위성의 송신신호세기는 같다고 가정하며 신호 대 잡음비 (signal-to-noise-ratio, SNR)은  $P/N_0$ 이다. 시계드립  $\delta$  는 [-50, 50] m/s의 균일하게 분포된 난수로 시뮬레이션하였다. 비교군으로는 Doppler만을 이용한 측위를 고려하였다.

그림 2는 LEO 위성 수  $L$  에 따른 측위 파라미터의 CRLB를 보여준다.  $L$  이 증가함에 따라 기하학적 관점에서 보다 많은 anchor 수를 확보하기 때문에 측위 CRLB가 감소함을 확인할 수 있다. 또한, 제안 carrier-phase 측위 (carrier-phase-based)가 Doppler 측위 (Doppler-based) 대비 약 100배 정도의 CRLB가 낮음을 확인할 수 있으며, 정수모호성으로 인한 측위 오차를 반영하여도 carrier-phase이 ranging 분해능이 높기 때문에

성능이 개선됨을 확인할 수 있다. 그림 3은 신호 대 잡음 비에 따른

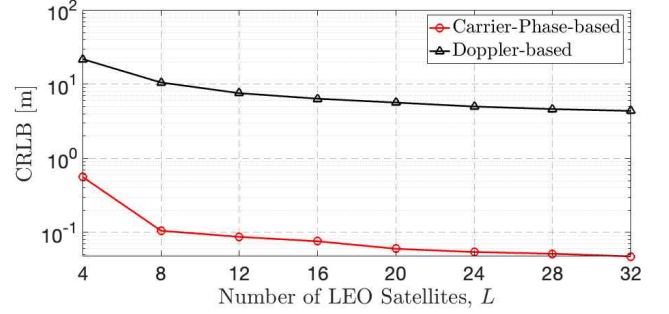


그림 2 위성 수  $L$  에 따른 CRLB (SNR=10 dB)

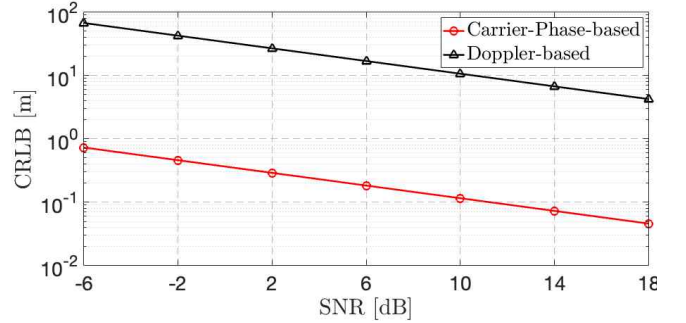


그림 3 신호 대 잡음 비 SNR에 따른 CRLB ( $L = 16$ )

CRLB를 보여준다. 그림 2와 마찬가지로 carrier-phase 측위가 Doppler 측위 대비 약 100배 정도의 CRLB가 낮음을 확인할 수 있으며, SNR이 증가함에 따라 CRLB가 감소함을 확인할 수 있다. 특히, SNR>10dB에서 carrier-phase 측위의 CRLB는 10cm 이하임을 확인하였다.

#### V. 결론

본 논문은 LEO-PNT 시스템에서 정수모호성을 고려하여 carrier-phase 측위의 이론적 하한을 분석하였다. 정수모호성으로 인한 측위오차를 반영하여도 carrier-phase 측위가 Doppler 측위 대비 약 100배 정도의 CRLB가 낮음을 확인하였다. 이를 확장하여 정수모호성으로 인해 생기는 높은 계산복잡도를 낮추는 새로운 carrier-phase 측위 알고리즘을 연구할 계획이다.

#### ACKNOWLEDGMENT

이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. NRF-2023RIA2C3002890).

#### 참고 문헌

- [1] F. S. Prol et al., "Position, navigation, and timing (PNT) through low earth orbit (LEO) satellites: A survey on current status, challenges, and opportunities," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 83, 2022
- [2] U. K. Singh, M. R. B. Shankar and B. Ottersten, "Opportunistic localization using LEO signals," *IEEE 56th Asilomar Conf. Signals, Syst.*, Pacific Grove, CA, USA, 2022, pp. 894-899.
- [3] J. Kang, et al. "Fundamental Performance Bounds for Carrier Phase Positioning in LEO-PNT Systems," *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Process. (ICASSP)*, 2024.
- [4] F. Kunzi and O. Montenbruck, "Precise onboard time synchronization for LEO satellites," *NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation*, vol. 69, no. 3, 2022.