

Tight Bounds on the Q-function

우지현, 김용준*

포항공과대학교 전자전기공학

jhwool1997@postech.ac.kr, yongjune@postech.ac.kr

Tight Bounds on the Q-function

Dept. Electrical Eng.

POSTECH

요약

Q-함수는 통계 및 통신 분야에서 중요하게 활용되는 함수로, 표준 정규 분포(standard normal distribution)의 오른쪽 꼬리(tail) 영역에 해당하는 확률을 나타낸다. 특히, 통신 분야에서 신호의 오류 확률을 추정하여 통신 성능을 분석하기에 필수적인 함수이다. 하지만, Q-함수를 닫힌 형태(closed form)로 표현할 수 없기 때문에, Q-함수를 근사식 및 경계 함수를 통해 단순화하는 것이 중요하다. 본 논문에서는 Q-함수의 계산 효율성을 높이기 위해 다양한 상한(upper bounds) 및 근사식을 소개하고 이론적으로 분석하고자 한다.

I. 서론

Q-함수 및 에러 함수(erf)는 통신 및 통계학에서 광범위하게 활용되는 함수이다. 특히, 다양한 통신 모델의 오류 확률을 평가하는 통계적 성능 분석에서 사용된다. 하지만, 이러한 확률 값은 닫힌 형태(closed form)로 표현할 수 없는 적분 연산을 포함하고 있어 Q-함수를 더 쉽게 다룰 수 있도록 근사치 및 경계를 찾는 것이 필요하다 [1]. 이러한 Q-함수의 근사 및 경계는 여러 형태로 제시되었으며, 이러한 함수를 소개하고 이론적으로 분석하고자 한다.

II. 본론

Q-함수는 표준 정규 분포(standard normal distribution)의 꼬리 영역에 해당하는 확률을 측정하는 지표로서, 표준 정규 분포의 확률 변수 X 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$Q(x) = \text{Prob}(X \geq x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

위와 같이 Q-함수에는 적분 함수가 포함되어 있어 다양한 근사 함수 및 경계함수가 제시되어, 본 논문에서는 주요한 근사식 및 경계 함수를 먼저 소개하고자 한다. 모든 근사식 및 경계 함수는 $x > 0$ 에서 정의되었다.

Jang 은 표준 정규 분포의 확률 밀도 함수를 활용하여 아래와 같이 상한 함수(upper bound)를 제시하였다 [2].

$$Q^{[2]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi}{2}x\right)\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Chiani 는 간단한 두 지수 함수의 합으로 근사식을 표현하였으며, 이 근사식은 $x > 0.5$ 에서 Q-함수의 상한 함수가 된다 [3].

$$Q^{[3]}(x) = \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{2x^2}{3}\right)$$

위 근사식 및 경계함수들은 큰 x 에서는 정확한 근사를 제공하지만, 작은 x 에서는 상대적으로 부정확하다. 이에 Aberu 는 작은 x 에서 매우 정확하고 큰 x 값에서는 덜 정확한 상한 함수를 제시하였다 [4].

$$Q^{[4]}(x) = \frac{1}{50} \exp(-x^2) + \frac{1}{2(x+1)} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Borjesson 는 표준 정규 분포의 확률 밀도 함수를 활용하여 더욱 실용적인 근사 함수를 제시하였다 [5].

$$Q^{[5]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

위 근사함수 및 경계함수와 Q-함수의 그래프는 Fig. 1 과 같다.

* Corresponding author

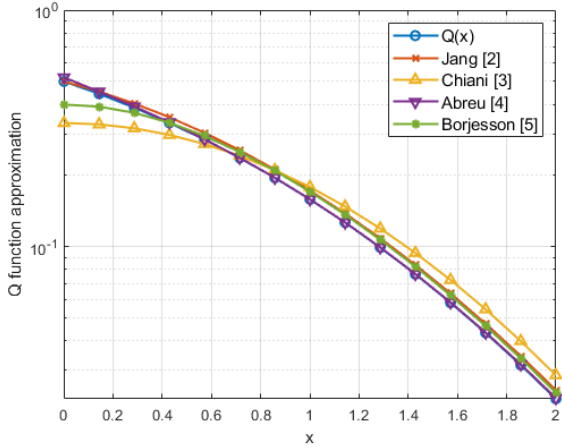


Fig. 1. Q-함수 근사식 및 경계 함수.

이처럼 근사식 또는 경계 함수를 통해 Q-함수를 닫힌 형태(closed form)로 단순화하기 위한 연구는 많이 발전하였으나, 대부분의 경계 함수는 Q-함수의 상한만을 다루며, 하한에 대한 연구는 상대적으로 부족하다. 이는 주로 오류 확률을 계산할 때 오류의 하한보다는 상한이 중요하기 때문이다. 하지만, $x < 0$ 에서도 Q-함수의 상한을 연구하기 위해서는 $Q(-x) = 1 - Q(x)$ 를 활용하여 $x > 0$ 에서의 Q-함수의 하한을 구하는 연구가 필요하다. Jacobs 는 Q-함수의 하한 및 상한 함수를 아래와 같이 유도하였다 [6].

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}Q(x) &= \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \cdot t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{x} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \int_x^{\infty} \frac{1}{t^3} \cdot t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt\end{aligned}$$

위 식에서, $0 < \int_x^{\infty} \frac{1}{t^3} \cdot t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt < \frac{1}{x^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 가 성립하므로 아래 관계식이 성립한다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

이 때, 위 유도식의 적분 항의 상한을 계산하지 않고, 부분 적분을 활용하여 Q-함수를 다항식의 합으로 표현하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} Q(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} + \frac{15}{x^7} - \frac{105}{x^9} \dots\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n+1}} \frac{(2n-1)! (-1)^n}{(n-1)! 2^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

즉, 표준 정규 분포의 확률 밀도 함수와 유리함수 다항식의 곱으로 표현한 Q-함수의 근사식은 함수의 상한 및 하한으로 활용 가능하다. 유리함수 다항식을 살펴보면, 유리함수의 덧셈과 뺄셈이 반복되는 패턴을 확인할 수 있다. 이는 유도 과정에서 양의 적분값을 반복적으로 더하고 빼는 방식으로 이루어지며, 결과적으로 유리함수 다항식의 각 항까지의 합과 표준 정규 분포의 확률 밀도 함수의 곱은 각각 상한 및 하한 함수의 역할을 하게 된다. 예를 들어, [6] 논문에서 제시한 바와 같이

1 항($\frac{1}{x}$)은 상한을 나타내고, 첫 2 항까지의 합($\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$)은 하한을 표현할 수 있으며 다시 3 항까지의 합은 상한을 나타낼 수 있다. 이러한 방식으로 각 항을 추가함으로써 점진적으로 Q-함수의 더 정확한 상한 및 하한의 표현할 수 있으며, Q-함수의 더욱 정밀한 분석을 가능하게 한다. 이러한 정확한 상한 및 하한식은 통신 분야의 연구 및 성능 분석에 광범위하게 사용될 수 있다.

III. 결론

본 논문에서는 Q-함수의 근사식 및 경계 함수를 소개하고 이론적으로 분석하였다. 이러한 연구는 Q-함수를 통해 오류 확률을 보다 쉽게 계산할 수 있게 도와주며, 이는 통신 및 통계 분야에서 중요한 기여를 할 수 있다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원 및 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2021-0-00400, 저사양 디바이스 대상 고효율 PQC 안전성 및 성능 검증 기술 개발, No. RS-2023-00212103, 고효율 및 저지연 6G 를 위한 시맨틱 및 과제 지향 통신 기법).

참 고 문 헌

- [1] I. M. Tanash and T. Riihonen, "Global minimax approximations and bounds for the Gaussian Q-function by sums of exponentials," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 68, no. 10, pp. 6514-6524, Oct. 2020.
- [2] W. M. Jang, "A Simple Upper Bound of the Gaussian Q-Function with closed-form error bound," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 15, no. 2, pp. 157-159, Feb. 2011.
- [3] M. Chiani, D. Dardari and M. K. Simon, "New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 2, no. 4, pp. 840-845, Jul. 2003.
- [4] G. Abreu, "Very simple tight bounds on the Q-function," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 60, no. 9, pp. 2415-2420, Sep. 2012.
- [5] P. Borjesson and C.-E. Sundberg, "Simple approximations of the error function Q(x) for communications applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 27, no. 3, pp. 639-643, Mar. 1979.
- [6] I. M. Jacobs and J. M. Wozencraft, "Principles of communication engineering," New York: Wiley, 1965.