# Clauser-Horne-Shimony-Holt 게임에 기반한 간섭채널의 비국소적 네트워크 코딩

윤지영, Ashutosh Rai, 배준우
한국과학기술원

jiyoungyun@kaist.ac.kr, ashutosh.rai@kaist.ac.kr, joonwoo.bae@kaist.ac.kr

# Nonlocal network coding in interference channels based on Clauser-Horne-Shimony-Holt game

Jiyoung Yun, Ashutosh Rai, Joonwoo Bae
Korea Advanced Institute of Science and Technology (KAIST)

## 요 약

본 논문은 비국소적 게임을 통해 잡음이 발생하는 2 명의 송신자와 2 명의 수신자로 구성된 간섭 채널을 고려한다. 비국소적 게임 중 Clauser-Horne-Shimony-Holt(CHSH) 게임에서 두 송신자가 보낸 메세지가 승리 전략을 따르는 지에 따라 두 가지 다른 채널을 도입한다. 양자 상관 관계에 의해 실현된 네트워크 코딩이 국소적인 자원을 활용하는 것 보다 더 높은 채널 용량을 달성할 수 있음을 보인다. 즉, 상대론적 비국소성, 양자 및 국소적 자원에 따른 채널 합계 용량의 차이가 존재함을 보인다. 양자 의사 텔레파시 게임의 경우와 달리 상대론적 비국소적 자원을 사용하는 네트워크 코딩은 양자 자원을 사용하는 것보다 뚜렷하게 더 효율적이다. 또한 양자 자원을 이용하는 최적의 인코딩 전략에 대해 논의한다.

## Ⅰ. 서 론

2개의 입력 $X_1, X_2$ 및 2개의 출력 $Y_1, Y_2$으로 구성된 네트워크 채널, $\mathcal{N} \coloneqq X_1, X_2 \to Y_1, Y_2$은 $I(X_1, Y_2) \neq 0$ 또는 $I(X_2, Y_1) \neq 0$인 경우 간섭 채널에 해당한다. 여기서 $I$는 상호 정보량을 나타낸다. 2-2 간섭채널은 2개의 입력 $X_1, X_2$에 대하여 출력 $Y_1, Y_2$에 대한 확률분포 $P_N(Y_1, Y_2 | X_1, X_2)$로 표시되며, 두 송신자의 메시지 $m_1$, $m_2$에 대해 네트워크 코딩 $E: (m_1, m_2) \to (X_1, X_2)$을 고안할 수 있다. 인코팅 $E$는 상대론적 비국소성($NS$), 양자($Q$), 국소성($L$)으로 분류되는 두 송신자 간의 공유되는 상관 관계를 활용할 수 있다. 네트워크 고딩을 최적화하여 각각 개별 송신자와 개별 수신자 간의 채널 용량의 총합에 해당하는 합 채널 용량 (Sum capacity)를 고려한다:

$$C^{(R)}(\mathcal{N}) = \max_{E \in R} I_{sum}^{(R)},$$

$$I_{sum}^{(R)} = [I(X1, Y1) + I(X2, Y2)].$$

네트워크 정보 이론[1]에서는 특히 단일 문자 잡음 채널이 독립적이고 동일하게 분포된(i.i.d.) 방식으로 수행되는 경우 채널 용량을 분석하는 데 많은 노력을 기울였다. 참조에서 [2], 비표준 잡음은 송신자의 메시지가 비국소성 게임의 승패에 따라 인코딩 후 4개의 채널 입력에 대해 일괄적으로 잡음이 발생하는 것으로 간주한다. 특히, 승리 확률이 자원 $NS, Q, L$에 의해 구조화되는 Clauser-Horne-Shimony-Holt(CHSH) 게임을 고려한다. 시나리오는 당사자과 두 송신자와 게임을 하는 방식으로 악의적인 당사자 관점에서 바꾸어 말할 수 있다. 당사자가 게임에서 이기면 채널에 잡음이 도입되고 그렇지 않은 경우, 즉 두 명의 송신자가 게임에서 이기면 잡음이 없는 채널이 정의된다. 양자 상관 관계를 공유하는 두 당사자가 기존 국소적 자원에 비해 더 높은 합 채널 용량을 달성할 수 있는 것으로 나타났으며[3], 채널 용량 간의 엄격한 계층 구조가 표시된다. 놀랍게도 양자 상관 관계가 있는 비국소적 인코딩은 기존 국소적 자원을 활용한 채널 용량의 한계를 능가한다.

## Ⅱ. 본론

본 연구에서 임의의 2-송신자, 2-수신자 간섭 채널에 대한 자원 $NS$, $Q$ 및 $L$을 사용하는 네트워크 코딩의 일반적인 프레임워크를 개발하고 다양한 채널에 대한 합계 채널 용량을 계산하는 방법을 보여준다. 엄격한 계층 구조

$$C^{(NS)}(\mathcal{N}) \geq C^{(Q)}(\mathcal{N}) \geq C^{(L)}(\mathcal{N})$$

는 다양한 간섭 채널 $\mathcal{N}$에 대해 보여진다. 양자 자원을 사용하 최적의 인코딩도 제시한다.

CHSH 게임을 기반한 간섭 채널: CHSH 게임을 적용하여 잡음을 도입하는 간섭 채널은 다음과 같다. 두 송신자 앨리스(A)와 밥(B)은 메세지 $(m_1, m_2)$를 준비하고, 각각 메세지를 $m_1 = 0$, $m_2 = 0$으로 준비할 확률을 $\pi_1, \pi_2$라 한다. 2비트 메세지를 4비트로 인코딩하는 네트워크 코딩 후 변환된 채널의 입력은 $X_1 = (x_{11}, x_{12})$, $X_2 = (x_{21}, x_{22})$에 해당하며, 4비트 메세지는 $\mathcal{N}$으로 표시된 간섭 채널을 통해 전송된다. $\hat{m}_1$과 $\hat{m}_2$은 두 수신자, 찰리(C)와 데이브(D)의 결과 메시지를 나타낸다. 일반적으로 4비트에서 2비트 결과 메세지를 주는 채널은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathcal{N}_{\vec{p}} = \sum_{i,j\in\{0,1\}} p_{ij}\mathcal{N}_{ij},$$

여기서, $\mathcal{N}_{ij}[(x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})] = (x_{11} \oplus i, x_{21} \oplus j)$이며, $\vec{p} = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11})$은 $i,j \in \{0,1\}$에 대한 확률 $p_{ij}$의 벡터로, $\sum_{i,j\in\{0,1\}} p_{ij} = 1$을 만족한다. 즉, 채널 $\mathcal{N}_{\vec{p}}$는 확률 $\vec{p} = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11})$에 따라 두 송신자에게 잡음 $i$와 $j$를 도입하는 4개의 채널 $\mathcal{N}_{ij}$의 확률론적 혼합으로 설명될 수 있다.

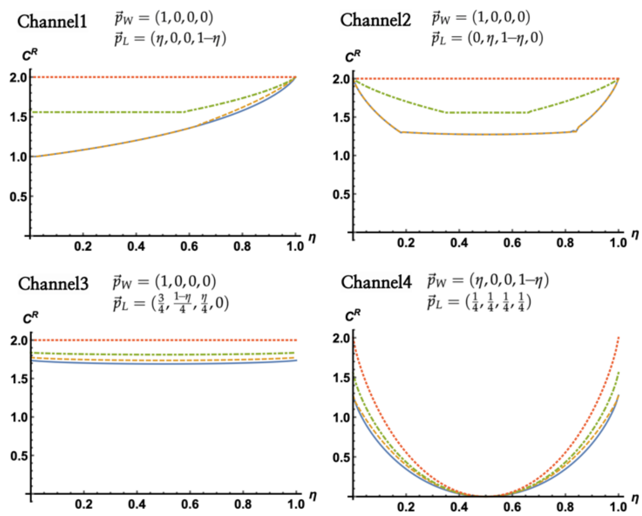
$\mathcal{N}^{(G)}$로 표시된 채널은 입력 $(x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})$이 게임 $G$의 승리 전략을 만족시키는지에 따라 다르게 작동하며, 게임에 기반한 간섭채널의 모델은 다음과 같다.

$$\mathcal{N}^{(G)} = \begin{cases} \mathcal{N}_{\vec{p}_W}, & (x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22}) \in W_G, \\ \mathcal{N}_{\vec{p}_L}, & otherwise. \end{cases}$$

특히, 간섭 채널은 송신된 값이 CHSH 비국소성 게임의 승리 전략인 $x_{12} \oplus x_{22} = x_{11}x_{21}$을 만족하는지 판별한다.

## Ⅲ. 결론

본 연구의 결과로는 사용 가능한 자원에 따라 채널 용량 사이에서 간격이 있음을 발견하고, 이를 위해 채널 용량을 조사한다. 이는 양자 자원의 유용성이 고전적인 한계를 넘어설 수 있음을 보여준다. 이때 사용된 양자 자원을 활용하는 최적의 인코딩 전략을 조사한다. 다음 네 가지 유형의 간섭 채널을 구성하여 네트워크 채널 잡음과 비국소성, 양자자원의 관계를 보인다.




[그림 1] 네가지 채널 유형의 합계 채널 용량은 다음과 같다.

채널 1은 서로 다른 자원을 공유하는 송수신자의 합계 용량 간의 차이를 다음과 같이 보여준다: $C^{(NS)}(\mathcal{N}) = 2 > C^{(Q)}(\mathcal{N}) \geq C^{(L)}(\mathcal{N})$. 이것은 양자를 넘어선 상대론적 비국소성은 잡음이 많은 채널로부터 메세지를 보호할 수 있는 반면, 양자 및 국소성 자원은 동일한 잡음에 영향을 받는 것을 보여준다. 이는 채널 2, 채널 3에서도 확인된다. 채널 1의 일부 $\eta$ 범위에 해당하는 채널에 대해 $C^{(NS)}(\mathcal{N}) > C^{(Q)}(\mathcal{N}) = C^{(L)}(\mathcal{N})$의 관계를 확인할 수 있고, 이는 상대론적 비국소적 상관관계가 다른 자원보다 더 유용한 자원임을 보인다. 또한, $C^{(NS)}(\mathcal{N}) > C^{(Q)}(\mathcal{N}) > C^{(L)}$ 관계를 보여주는 채널에서는 상대론적 비국소적 자원이 양자 자원보다 더 유용하며, 양자 자원은 국소적 자원보다 더 유용하다는 것을 보여준다. 이는 채널 1,2,4에서 모두 보여준다. 채널 4에서는 각 자원을 활용한 채널 용량이 모두 동일한 채널, 즉 $C^{(NS)}(\mathcal{N}) = C^{(Q)}(\mathcal{N}) = C^{(L)}$을 만족하는 채널 을 발견할 수 있으며, 비국소성의 유용성을 보여주지 않는 채널이 존재함을 확인할 수 있다. 양자 하한을 위한 최적의 인코딩 방식은 모든 채널 클래스에 대해 동일하며, 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccccccccccccccc} & \multicolumn{16}{c}{(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})} \\ \hline (m_1, m_2) & \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & \alpha & \beta \end{array}$$

$E(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} | m_1, m_2)$은 메세지 $(m_1, m_2)$에 대한 $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$의 확률 $P_E(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} | m_1, m_2)$로 설명된다. 여기서 $\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{8}$, $\beta = \frac{2-\sqrt{2}}{8}$ 이다.

### 참 고 문 헌

[1] A. El Gamal and Y.-H. Kim, Network Information Theory (Cambridge University Press, New York, 2012).

[2] Y. Quek and P. W. Shor, Quantum and superquantum enhancements to two-sender, two-receiver channels, Phys. Rev. A 95, 052329 (2017).

[3] J. Yun, A. Rai, and J. Bae, Nonlocal Network Coding in Interference Channels, Phys. Rev. Lett. 125, 150502 (2020).