양자 선형 시스템 알고리즘에서 Read-Out 문제 연구

박정훈, 허준
고려대학교
zucht@korea.ac.kr, junheo@korea.ac.kr

A Study on the Read-Out Problem in Quantum Linear System Algorithms

Park Jeonghoon, Heo Jun
Korea Univ.

요 약

이 논문은 양자 선형 시스템 알고리즘에서 read-out 문제를 다룬다. 양자 선형 시스템 알고리즘은 방정식의 해를 양자 상태로 계산해서 각 항의 정보는 알 수 없다. 이 연구에서는 해의 각 항이 복소평면 위에서 방사형으로 분포되어 있을 때, 각각을 구분하는 방법을 제안한다. 이를 위해 주어진 방정식을 적절히 변형하고, 양자 선형 시스템 알고리즘 및 양자 진폭 추정 알고리즘을 적용하는 기법을 소개한다.

Ⅰ. 서 론

양자 선형 시스템 알고리즘은 선형 방정식을 고전 알고리즘 보다 빨리 해결한다[1]. 하지만 방정식의 해가 양자 상태로 존재하여서 각 항의 값을 바로 알 수 없다. 기존 방법에서 추가 과정으로 양자 진폭 추정 알고리즘을 사용하지만, 해의 각항의 진폭 정보만 알 수 있어서 적용 범위가 작다[2].

이 논문에서는 해의 각 항이 복소평면에서 방사형으로 분포되어 있을 때를 가정한다. 제안한 방법에서 각 항의 값을 알아내는 기법으로 기존 방법인 양자 진폭 추정 알고리즘과 더불어 방정식 변형을 사용한다.

Ⅱ. 본론

선형 방정식 $Ax=y$가 주어져 있다. 여기서 A는 $N\times N$ 행렬이고, x와 y는 N차원 열벡터이다. 그리고 x는 다음과 같은 꼴이라 가정한다.

$$x_j=|x_j|e^{i\theta_j},$$

여기서 $|x_j|=\sqrt{r_1},\sqrt{r_2},\cdots,\sqrt{r_n}$ $(0<r_1<r_2<\cdots<r_n)$ 이고, $\theta_j=\frac{2\pi}{2^m}k\ (k=0,1,\cdots,2^m-1)$ 이다. 제안한 알고리즘은 다음 그림과 같이 세 단계로 이루어져 있다.

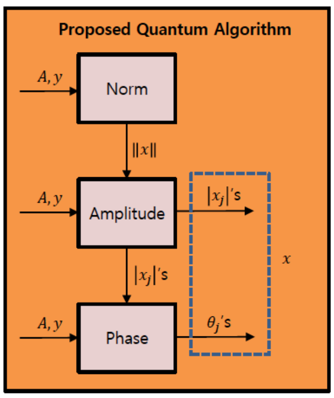

그림 1. 제안한 알고리즘의 흐름도

먼저 주어진 방정식의 해 x의 크기인 $\|x\|$ 을 계산한다. 그 다음 x_j의 크기인 $|x_j|$을 구한다. 마지막으로 x_j의 위상인 θ_j를 결정한다.

첫 번째로 $\|x\|$ 을 계산하기 위해 주어진 선형 방정식 $Ax=y$에 다음 방정식을 추가 한다.

$$x_0=\sqrt{N}$$

변형한 방정식에 양자 선형 시스템 알고리즘을 적용하여 다음 양자 상태를 얻는다.

$$|\tilde{x}> \ =\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\|x\|^2+N}}|0>\ +\ \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2+N}}|\phi>,$$

여기서 $|\phi>\perp|0>$ 이다. 이제 양자 진폭 추정 알고리즘을 적용하여 $|0>$의 양자 진폭을 얻고, 여기서 $\|x\|$ 을 계산한다.

두 번째로 $|x_j|$을 구하기 위해 방정식

$$-\sqrt{N}x_j+x_{N+1}=0$$

을 추가하여 방정식을 변형하고, 양자 선형 시스템 알고리즘으로 다음 양자 상태를 얻는다.

$$|\tilde{x}> \ =\frac{\sqrt{N}x_j}{\sqrt{\|x\|^2+N|x_j|^2}}|0>\ +\ \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2+N|x_j|^2}}|\phi>,$$

여기서 $|\phi>\perp|0>$ 이다. 그리고 양자 진폭 추정 알고리즘을 적용하여 $|0>$의 양자 진폭을 얻고, 여기서 $|x_j|$을 계산한다.

마지막으로 θ_j를 결정하기 위해 방정식을 다음과 같이 변형한다.

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} I_N & & & & \\ O & AZ & & & \\ & Y & AZ & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & Y & AZ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega & & & & \\ & \Omega & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \Omega & \\ & & & & \Omega \end{pmatrix},\ \tilde{y}=\begin{pmatrix} J \\ y \\ O \\ O \end{pmatrix},$$

여기서

$$Y=-|y><j-1|,$$
$$J=(1,\cdots,1)^T,$$

$$Z = I_N + (|x_j| - 1)|j-1><j-1|,$$
$$\Omega = I_N + (|N^{-1}-1)|j-1><j-1|$$

이다. 이제 양자 선형 시스템 알고리즘을 적용하여 다음 양자 상태를 얻는다.

$$|\tilde{x}> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi k_0} \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}k_0 + \pi k_1\right)} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(\phi + \pi k_{m-1})} \end{pmatrix},$$

여기서 $k = k_{m-1}k_{m-2}\cdots k_{0\,(2)}$ 이다. 첫 시스템부터 차례대로 측정을 하여 각 k_t의 값을 얻는다.

Ⅲ. 결론

이 논문은 양자 선형 시스템 알고리즘의 해에서 각 항의 정보를 추출하는 read-out 문제를 다루었고, 각 항이 방사형 복소수인 경우에 각 값을 구별하는 방법을 제안하였다. 이것을 위해 방정식 변형 기법과 양자 진폭 추정 알고리즘을 응용하였다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2021년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국 연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2019R1A2C2010061).

참 고 문 헌

[1] A.W. Harrow, A. Hassidim, S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. 103, 150502, 2009.

[2] G. Brassard, P. Hoyer, M. Mosca, A. Tapp, Quantum Amplitude Amplification and Estimation, vol. 305, AMS Contemporary Mathematics, 2002.