

## 직교성에 가까운 희소 중첩 코드

한동화, 이남윤  
포항공과대학교

dhan92@postech.ac.kr, nylee@postech.ac.kr

## Near-Orthogonal Sparse Superposition Codes for Short-Packet Low-Rate Communications

Donghwa Han, Namyoon Lee  
POSTECH

## 요약

본 논문은 부가 백색 가우스 잡음 (additive white Gaussian noise: AWGN) 채널에서 짧은 패킷을 사용한 저전력 통신에 적합한 직교성에 가까운 희소 중첩 코드 (near-orthogonal sparse superposition codes: N-OSS codes) 를 제안하였다. 근사적으로 직교하는 부분 부호 워드를 순차적으로 생성하는 부호화 기법과 근사 메시지 전달 (approximate message passing: AMP) 알고리즘을 사용한 복호 방식을 제시한다.

## I. 서론

차세대 이동통신 서비스에서는 1Tbps 급 데이터 전송이 요구될 것이며, 이에 대응하기 위한 THz 무선통신 기술이 주요한 핵심기술로 여겨지고 있다.

하지만 초 고주파 대역 송신에서는 경로 손실과 전파 감쇠가 상당히 때문에, 이를 극복할 수 있는 무선 시스템 개발이 중요한 과제로 남아있다. 또한 저 지연성과 저전력이 요구되면서 이에 적합한 송신 구조로 짧은 패킷 통신이 고려되고 활발한 연구가 이루어지고 있다 [1].

종래의 부호 및 변조화 방법들은 긴 부호를 보내서 긴 패킷을 효율적으로 전송하고 점근적으로 Shannon 채널 용량을 얻는 것에 중점을 두었기에 짧은 패킷 통신에 바로 적용하기 어렵다. 그래서 복잡도가 낮으면서도 저전력 무선 통신에 적용 가능한 현대 부호들에 대한 분석과 새로운 부호 후보 제안이 이루어지고 있다 [2], [3].

희소 중첩 코드 (sparse superposition code) 에서 부호 워드는 희소한 메시지 벡터의 0 이 아닌 원소 인덱스에 해당하는 사전 행렬의 열 벡터들의 선형 결합으로 생성된다 [4]. 희소 중첩 부호는 AWGN 채널에서 Shannon-limit 을 달성하나, 부호 길이가 짧아질수록 복호화 성능이 저하되는 단점이 있다.

본 논문에서는 짧은 부호 길이와 전력 제한 영역에서도 저 복잡도의 복호화가 가능한 새로운 희소 중첩 코드 기법을 제안한다.

## II. 본론

본 논문에서  $M \in \mathbb{Z}^+$  은 부호 워드의 길이를 나타내고, 집합  $\{1, 2, \dots, M\}$  은  $[M]$  으로 표기한다. 사전 행렬  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  의 각 원소들은 동일하게  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{M})$  의 가우스 분포를 따르고  $N \in \mathbb{Z}^+$  은  $M$  보다 크다.

N-OSS 코드의 부호기는  $L$  개의 층으로 구성된다. 부호기는 차례대로 각 층에서 길이  $B_l$  의 2 진 정보 배열  $\mathbf{u}_l \in \mathbb{F}_2^{B_l}$  을  $N$  의 길이를 가진 희소 메시지 벡터  $\mathbf{x}_l = [x_{l,1}, x_{l,2}, \dots, x_{l,N}]^T$  에 매핑한다. 모든  $L$  개의 메시지 벡터는  $\|\mathbf{x}_l\|_0 = 1$  의 희소도를 가지고, 유의미한 원소에는 임의의 펄스 진폭 변조 (Pulse Amplitude Modulation: PAM) 성상도  $\mathcal{A}_l = \{a_{l,1}, a_{l,2}, \dots, a_{l,|\mathcal{A}_l|}\}$  의 값을 할당한다. 이때 서로 다른 층은 겹치지 않는 PAM 성상도를 사용한다:

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset, \quad i \neq j \in [L]. \quad (1)$$

각 층의 부분 부호 워드  $\mathbf{c}_l \in \mathbb{R}^M$  은  $\mathbf{x}_l$  과 사전 행렬  $\mathbf{A}$  의 곱으로 만들어진다.

$$\mathbf{c}_l = \mathbf{A} \mathbf{x}_l. \quad (2)$$

부호기는 첫 번째 층의 인덱스 후보 집합  $\mathbf{N}_1 = [M]$  에서 무작위로 하나의 인덱스  $i_1$  를 추출하고  $x_{1,i_1}$  에 성상도  $\mathcal{A}_1$  를 할당해 희소 메시지 벡터  $\mathbf{x}_1$  를 생성한다. 첫 번째 부호 워드  $\mathbf{c}_1$  는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{A} \mathbf{x}_1 = x_{1,i_1} \mathbf{a}_{i_1} \quad (3)$$

수식 (3)에서  $\mathbf{a}_{i_1}$  는  $\mathbf{A}$  의  $i_1$  번째 열 벡터를 의미한다.

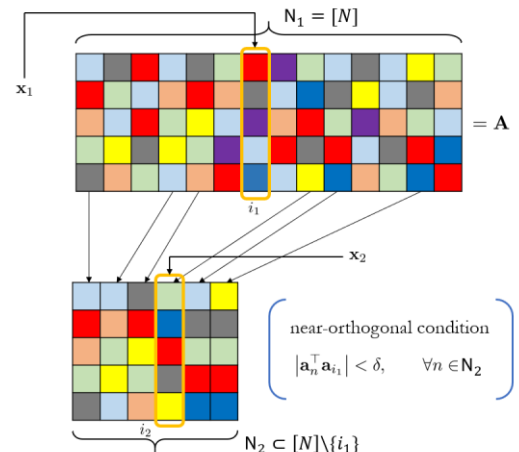


그림 1. N-OSS 의 연속적 부호 과정

각 부호 워드들이 근사한 직교성을 가질 수 있도록 그림 1 처럼 두 번째 층에서 새로운 인덱스 후보 집합  $N_2 \subset [N] \setminus \{i_1\}$  를 다음과 같이 정의한다:

$$N_2 = \{n \in [N] \setminus \{i_1\} : |\mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_{i_1}| < \delta\} \quad (4)$$

$\mathbf{u}_2 \in \mathbb{F}_2^{B_2}$  는  $\mathbf{x}_2 = \{0 \cup \mathcal{A}_2\}^N$  에 매핑되고 0 이 아닌 값을 가지는  $\mathbf{x}_2$  의 서포트 인덱스를  $i_2 \in N_2$  라고 표기한다.

마지막  $L$  번째 층의 후보 집합  $N_L \subset [N] \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{L-1}\}$  은 아래와 같이 표현할 수 있다:

$$N_L = \bigcap_{l=1}^{L-1} \{n \in [N] \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{L-1}\} : |\mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_{i_l}| < \delta\}. \quad (5)$$

최종적으로 채널에 전송되는 N-OSS 코드의 부호 워드는  $L$  개의 부분 부호 워드의 선형 결합이다:

$$\mathbf{c} = \sum_{l=1}^L \mathbf{c}_l = \sum_{l=1}^L \mathbf{A} \mathbf{x}_l = \sum_{l=1}^L x_{l,i_l} \mathbf{a}_{i_l} = \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (6)$$

이러한 부호 방식 덕분에 다른 층에서 생성된 부분 부호 워드들은 서로 근사 직교하는 특성을 가진다:

$$\frac{|\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j|}{\|\mathbf{c}_i\| \|\mathbf{c}_j\|} < \delta, \quad i \neq j \in [L]. \quad (7)$$

$l$  번째 층에서 선택할 수 있는 인덱스의 가짓수가  $\binom{|N_l|}{1}$  이기에

$$B_l = \left\lfloor \log_2 \binom{|N_l|}{1} \right\rfloor + \lfloor \log_2 |\mathcal{A}_l| \rfloor \quad (8)$$

의 정보 비트가 부호화된다. 따라서 채널을  $M$  번 사용할 때 전송되는 부호율은 아래와 같다:

$$R = \frac{\sum_{l=1}^L \left( \left\lfloor \log_2 \binom{|N_l|}{1} \right\rfloor + \lfloor \log_2 |\mathcal{A}_l| \rfloor \right)}{M}. \quad (9)$$

다음으로 AWGN 채널에서 AMP 알고리즘을 이용한 복호 방식을 소개한다. 송신기가 부호 워드  $\mathbf{c}$  를 전송했을 때, 수신단이 받는 신호는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}). \quad (10)$$

AMP 알고리즘은 간단한 구조 대비 높은 복호화 성능 때문에 수식 (10)의 일반적인 선형 회귀 문제에 널리 사용되고 있다 [5].  $t$  번째 반복에서  $\mathbf{x}$  의 추정 값을  $\mathbf{x}^t \in \mathbb{R}^N$  로 표기하고 수식 (11)의  $\eta_t$  를 denoiser 로 사용할 때 N-OSS 의 복호 알고리즘은 그림 2 와 같이 표현된다.

$$\eta_t(\mathbf{x}^t + \mathbf{A}^T \mathbf{r}^t) := \mathbb{E}[\mathbf{x} | \mathbf{x}^t + \mathbf{A}^T \mathbf{r}^t] \quad (11)$$

---

#### Algorithm 1: Approximate Message Passing

---

**Data:** matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ , measurement vector  $\mathbf{y}$ , denoiser  $\eta_t$ , and number of iterations  $T$

**for**  $1, 2, \dots, T$  **do**

$\mathbf{r}^t \leftarrow \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}^t + \frac{N}{M} \mathbf{r}^{t-1} \langle \eta'_{t-1}(\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{r}^{t-1}) \rangle$   
 $\mathbf{x}^{t+1} \leftarrow \eta_t(\mathbf{x}^t + \mathbf{A}^T \mathbf{r}^t)$

**end**

---

그림 2. AMP 복호 알고리즘

$\langle \mathbf{x} \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  은 경험적 평균 연산자이다. AMP 의 중요한 특성은 온사게르 항  $\frac{N}{M} \mathbf{r}^{t-1} \langle \eta'_{t-1}(\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{r}^{t-1}) \rangle$  때문에, 사전행렬  $\mathbf{A}$  의 크기가 커질 때  $\mathbf{x}^t + \mathbf{A}^T \mathbf{r}^t$  가 가우스 잡음이 섞인 원래의 메시지 벡터  $\mathbf{x}$  의 분포에 근사화된다는 점이다:

$$\mathbf{x}^t + \mathbf{A}^T \mathbf{r}^t = \mathbf{x} + \mathcal{N}(\mathbf{0}, \tau_t^2 \mathbf{I}). \quad (12)$$

수식 (12)에서 잡음의 분산  $\tau_t^2$  은 다음과 같이 재귀적으로 나타낼 수 있다 [6].

$$\tau_t^2 = \sigma^2 + \frac{N}{M} \mathbb{E} \left[ \left\{ \eta_{t-1}(\mathbf{x} + \mathcal{N}(\mathbf{0}, \tau_{t-1}^2 \mathbf{I})) - \mathbf{x} \right\}^2 \right]. \quad (13)$$

각 층의 성상도  $\mathcal{A}_l$  가  $\beta_l$  로 이루어진 한원소 집합일 때  $X = \{\beta_1, \dots, \beta_L\}$  의 분포를 수식 (14)로 정의하고

$$\Pr(X = \beta_l) = p_l, \quad (14)$$

잡음이 더해진 관측 값은 다음과 같이 표기한다.

$$Y = X + V, \quad V \sim \mathcal{N}(0, \tau^2). \quad (15)$$

조건부 기대값과 분산은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\eta(y; \tau^2) = \mathbb{E}[X|Y = y] = \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l p_l e^{\frac{(y-\beta_l)^2}{\tau^2}}}{\sum_{l=1}^L p_l e^{\frac{(y-\beta_l)^2}{\tau^2}}}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \eta'(y; \tau^2) &= \frac{1}{\tau^2} \text{Var}[X|Y = y] \\ &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{l=1}^L \left( \frac{\sum_{l'=1}^L \beta_{l'} p_{l'} e^{\frac{(y-\beta_{l'})^2}{\tau^2}}}{\sum_{l'=1}^L p_{l'} e^{\frac{(y-\beta_{l'})^2}{\tau^2}}} \right)^2 \frac{p_l e^{\frac{(y-\beta_l)^2}{\tau^2}}}{\sum_{l'=1}^L p_{l'} e^{\frac{(y-\beta_{l'})^2}{\tau^2}}}. \end{aligned} \quad (17)$$

### III. 결론

본 논문에서는 새로운 최소 중첩 코드인 N-OSS 코드의 연속적 부호 구조와 AMP 알고리즘에 기반한 복호 기법을 제안하였다. 저 복잡도의 복호기와 부호율을 유연하게 설정할 수 있는 특성 때문에 짧은 패킷 통신에서 필요한 낮은 부호율을 가진 부호 후보군으로서 경쟁력을 가질 것으로 예상된다.

### 참고 문헌

- [1] B. Lee, S. Park, D. J. Love, H. Ji and B. Shim, "Packet Structure and Receiver Design for Low Latency Wireless Communications With Ultra-Short Packets," in *IEEE Transactions on Communications*, vol. 66, no. 2, pp. 796–807, Feb. 2018.
- [2] 3rd Generation Partnership Project (3GPP), "Multiplexing and channel coding," 3GPP TS 38.212 V.15.4.0, 2018.
- [3] G. Durisi, G. Liva, and F. Steiner, "Short-packet communications: fundamentals and practical coding schemes," IEEE GLOBECOM 2018.
- [4] A. Joseph and A. R. Barron, "Least Squares Superposition Codes of Moderate Dictionary Size Are Reliable at Rates up to Capacity," in *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 58, no. 5, pp. 2541–2557, May 2012.
- [5] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, "Message-passing algorithms for compressed sensing," Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 106, no. 45, pp. 18 914–18 919, Nov. 2009.
- [6] M. Bayati and A. Montanari, "The dynamics of message passing on dense graphs, with applications to compressed sensing," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 57, no. 2, pp. 764–785, Feb. 2011.