# 신호의 부호변환점의 대수적 구조를 활용한 스펙트럼 탐지 기술

손경락◦, 노호준*, 최완*
◦한국과학기술원, *서울대학교

◦skrandrew@kaist.ac.kr, *ted1102@snu.ac.kr, *wanchoi@snu.ac.kr

# A Spectrum Sensing based on Algebraic Structure of Zero crossing of a Signal

Kyung Rak Son◦, Hojun No*, Wan Choi*
◦KAIST, *Seoul National University.

요 약

본 논문은 주어진 주파수 패턴 인덱스 집합에 대해 원신호를 완벽하게 복원하도록 하는 범용 샘플링 패턴의 인덱스 집합에 대한 조건을 역이용하여 신호의 부호변환점(Zero-crossing, 영집합)이 있을 때 영집합의 대수적 구조를 활용하여 주파수 패턴을 파악하는 기법을 개발하였다. 주파수 대역 인덱스 집합의 후보들을 찾는 과정에 있어, 기존의 digit table 방식과 다르게 polynomial ring 의 특성을 통한 방식을 제안하였다.

## Ⅰ. 서 론

본논문에서는 인지 라디오의 1 차 사용자 발견, 전자정보전, 주파수 공유, 주파수 분할 다중 액세스 기술 등에 활용되는 수신기가 송신기의 정보가 없는 상황에서 서로 다른 여러 개의 주파수 성분으로 구성되어 있는 멀티밴드 신호의 주파수 대역 사용 패턴을 탐지하는 문제를 다루고자 한다. 이에 대한 기반 기술로써 기존의 에너지 탐색 기술, 사이클로스테이셔너리 특징점 추출 기술들 외에도 신호의 영점 교차 위치(Zero-crossing)를 통해 스펙트럼 탐지를 할 수 있다[1,2].

한편, 주파수 대역을 모두 사용하지 않는 신호에 대해, 신호 탐지가 아닌 신호 복원의 관점에 관한 연구들도 진행되었으며, 이러한 신호에 대해 샘플링 레이트가 잘 알려진 나이퀴스트 레이트보다 작아도 신호 복원이 가능함이 이론적으로 증명되었다 [3]. 이때 주파수 대역에 따라 서브-나이퀴스트 샘플링에 사용될 샘플링 패턴이 특정 조건을 만족해야 원신호가 완벽히 복원될 수 있다. 주어진 주파수 대역에 대한 범용 샘플링 패턴의 조건은 최근 [4,5]에서 대수적으로 특성을 찾는 연구가 진행되었다. 이러한 점에 착안해, 본 연구에서는 주파수 대역을 알 때 진행된 범용 샘플링 패턴의 조건을 역으로 주파수 대역 사용 패턴 탐지에 적용하는 방안에 대해 탐구한다.

## Ⅱ. 시스템 모델

본논문에서는 사전에 주파수 대역 사용 정보를 모르는 상황에서 주파수 대역 점유 정보를 파악하는 문제를 다루고자 합니다. 블라인드 멀티밴드 신호 $x(t)$ 는 실수값을 가진 연속파(Continuous-time) 아날로그 신호이다. 신호 $x(t)$ 는 $F = \cup_{i=1}^{p} F_i$ 의 주파수 성분을 가지는 여러 신호의 집합으로 표현될 수 있으나, 수신기는 신호 전송에 사용되고 있는 주파수 대역을 모르는 상황이다. 이 때, 총 주파수 대역을 유한 분해(Finite resolution)하여, 다음과 같이 $F$를 $M_s$개의 균등한 대역으로 나눌 수 있다. 이렇게 하면 사용하는 주파수 대역 $F$가 균등한 구조로 분할되지 않은 경우에도 주파수 대역을 $M_s$ 개로 구분하여 양자화할 수 있다. 이중에서 점유 중인 주파수 대역의 인덱스 집합을 $\mathcal{J} = (j_1, \cdots, j_a)$로 표기한다.

## Ⅲ. 주어진 주파수 패턴에 대한 범용 샘플링 패턴의 조건

주파수 점유 인덱스 집합이 $\mathcal{J} = (j_1, \cdots, j_a)$ 로 결정되어 있을 때, 범용 샘플링 패턴 $I$의 조건은 다음과 같다 [4].

> **정리 1.** 임의의 인덱스 집합 $I$가 주파수 대역 $\mathcal{J} = (j_1, \cdots, j_a)$에 대한 범용 샘플링 패턴일 필요충분조건은 $|I| = |\mathcal{J}|$ 이고 모든 $i_1, i_2 \in I$ 에 대해 $h(i_1 - i_2) = 0$ 여야 한다.

위 정리를 통해 범용 샘플링 패턴은 주파수 점유 인덱스 집합의 크기와 동일하고 인덱스 차이 값에서 함수값이 됨을 알 수 있으며, 이를 통해 신호의 시간 축에서 0 이 발생하는 인덱스 집합을 관측하여 범용 샘플링 패턴을 유추하는 방법이 있을 것을 예상할 수 있다.

## Ⅳ. 제안 기법의 예제

신호의 시간 축에서 영이 발생하는 인덱스 집합을 다음과 같이 $\mathcal{Z}(h) \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} | h(n) = 0\}$ 으로 표기한다. 논문 [3]에서는 영집합 $\mathcal{Z}(h)$이 주어져 있을 경우, digit-table 이라는 것을 생성하여 사용하는 주파수 대역의 후보들을 찾아내었다. 이와 다르게 우리는 Polynomial ring 의 원리를 활용해서 바로 주파수 대역 후보을 찾아내었으며, 본 논문에서는 간단한 예시로 제안 기법의 원리를 설명하고자 한다.

예를 들어, 주파수 대역을 $M_s = 8$ 로 분할하였을 때, 주파수 점유 대역이 $\mathcal{J} = (1,4,5,8)$ 인 상황을 가정한다. 이때 해당 주파수를 사용하는 신호 $h = \mathcal{F}^{-1}\mathbf{1}_{\mathcal{J}}$ 의 영집합을 계산하면, $Z(h) = \{1,3,4,5,7\}$ 에서 발생한다. 임의의 주파수 점유 대역에 대한 indicator 를 coefficient 로 가지는 polynomial 을 $P_{\mathcal{J}}(x) \colon= \mathbf{1}_{\mathcal{J}} \cdot (x^{M_s}, \cdots, x^0)$ 로 정의한다면, 영집합의 정의에 의해, $m \in Z(h) \leftrightarrow P_{\mathcal{J}}(w_N^m) = 0$ . (여기서 $w_N = e^{2\pi j/N}$ ) 여기서, $w_N^1, w_N^3, w_N^5, w_N^7$ 는 8 차 원분 다항식 (cyclotomic polynomial)의 $\phi_8(x) = x^4 + 1$의 해이고, $w_N^4$는 2 차 원분 다항식 $\phi_2(x) = x + 1$ 의 해가 된다. 즉, $\phi_8$ , $\phi_2$ 의 해가, $P_{\mathcal{J}}$가 되는 상황이므로, $\phi_8 \cdot \phi_2$가 $P_{\mathcal{J}}$를 나눠야 한다.

한편, $\phi_8, \phi_2$ , $P_{\mathcal{J}}$ 의 계수가 이미 이진법으로 표현되기 때문에, 우리는 앞선 다항식의 나눗셈을 이진 field 에 대한 다항식 환(polynomial ring)에서의 나눗셈으로

생각할 수 있다. 따라서, 이진 field 연산을 통해 $\phi_8 \cdot \phi_2 = x^5 + x^4 + x + 1$에 의해 나눠지는 모든 7 차 이하의 다항식을 얻을 수 있고 이는 다음 표로 정리된다.

| 다항식 환 | 다항식과 매치되는 주파수 대역 인덱스 집합 |
|---|---|
| $x^5 + x^4 + x + 1$ | (1,2,5,6) |
| $x^6 + x^5 + x^2 + x$ | (2,3,6,7) |
| $x^6 + x^4 + x^2 + 1$ | (1,3,5,7) |
| $x^7 + x^6 + x^3 + x^2$ | (3,4,7,8) |
| $x^7 + x^5 + x^3 + x$ | (2,4,6,8) |
| $x^7 + x^4 + x^3 + 1$ | (1,4,5,8) |

따라서, 우리는 서로 다른 4 개의 주파수 대역을 점유할 수 있는 총 $\binom{8}{4} = 70$개의 경우 중에서 6 개의 경우 중에 발생함을 알 수 있으며, 이는 효과적으로 주파수 대역 탐색 수를 줄였다고 할 수 있다.

## V. 결론

본논문에서는 주어진 주파수 패턴에 대한 범용 샘플링 패턴의 조건을 역이용하여 영집합이 있을 때 주파수 패턴을 파악하는 기법을 개발하였다. 이는 기존 논문에서 제시한 digit table 방식과도 차별된다. 현재 일반적인 경우에 대한 증명 및 알고리즘 개발을 진행 중이며, 추후 실제 Zero-crossing 을 통해 스펙트럼을 탐지하는 기술들도 조사하여 정교한 framework 를 구성할 예정이다.

## 참 고 문 헌

[1] B. Kedem and E. Slud, “Time series discrimination by higher order crossings,” *The Annals of Statistics*, vol. 10, no. 3, pp. 786-794, Sep. 1982.

[2] R. R. Shenoy, C. S. Seelamantula, “Spectral Zero-Crossings: Localization Properties and Applications”, *IEEE Trans. On Signal Process.*, vol. 63, no. 12, pp. 3177-3190, June 2015.

[3] H. Landau, “Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions,”*Acta. Math.*, vol. 117, pp. 37-52, 1967.

[4] B. Osgood, A. Siripuram, and W. Wu, “Discrete sampling and interpolation: Universal sampling sets for discrete bandlimited spaces,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 58, no. 7, pp. 4176-4200, Jul. 2012.

[5] A. Siripuram, W. Wu, and B. Osgood, “Discrete sampling: A graph theoretic approach to orthogonal interpolation,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 65, no. 12, pp. 8119-8130, Dec.  2019..