영등식 기법을 적용한 시간지연이 존재하는 불확실한 선형시스템의 제어기 설계

이용권, 김영재, 이승훈, 권오민*
충북대학교

leeywkgg@cbnu.ac.kr, *madwind@cbnu.ac.kr

Controller design for uncertain linear systems with time-varying delays via advanced zero equality approach

Lee Yong Gwon, Kim Yeong Jae, Lee Seung Hoon, *Kwon Oh Min
Chungbuk National Univ.

요 약

본 논문은 불확실성이 포함된 시스템에 시간지연이 발생했을 때, 피드백 입력제어를 통하여 시스템 신호를 안정화하는 문제에 대해 다루고 있다. 리아푸노프 안정성 해석 기법과 몇 가지 보조정리, 그리고 수학적 사실을 통하여 불확실성을 갖는 시간지연 시스템의 제어기 설계과정을 선형 행렬 부등식의 형태로 조건을 유도하였다. 이후 주요 결과의 부등식과 수치 예제를 통하여 그 결과를 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

네트워크, 로보틱스, 화학공학, 기계공학 등의 연구분야에서 시간지연 현상은 피할 수 없이 발생하는 현상이다. 이 시간지연은 시스템의 비동기화, 장비의 고장, 노화 등의 부정적인 요인을 만들기 때문에, 시간지연에 대한 해석과 제어방법에 대한 연구는 활발히 진행되고 있다. 시간지연에 대한 해석방법으로, 주파수의 영역에서 해석은 무한 차원의 극이 존재하기 때문에, 매우 복잡하다. 때문에, 시간영역에서의 해석으로 연구가 이루어지고 있다. 시간지연은 리아푸노프-크라소프스키 함수 (LKFs) 안정성 해석방법을 통한 연구가 가장 활발히 진행되고 있으며, LKFs 을 통한 해석방법의 편리성과 수학적으로 단순해지는 장점을 갖기 위하여 선형 행렬 부등식의 해석 기법은 발전해왔다. 그리고 공학의 분야를 넘어 뇌과학과 같은 생명과학 분야에서도 시스템의 표현이 선형행렬의 형태로 가능해지고, 시간지연에 대한 연구가 확장되어 연구되어지고 있다.

현실은 단순히 선형 조건만을 갖는 환경보다 비선형 조건을 포함하는 시스템이 다수이다. 그렇기 때문에, 불확실성과 같이 시간에 따라 변동하는 시스템을 고려하여 안정성을 보장하는 제어이론에 대한 관심이 크다. 또한 최근에는 기술의 발전에 의해 시스템이 복잡하고, 정교해지고 있기 때문에, 시스템의 변동하는 성분을 보장할 수 있는 불확실성이 포함된 시스템 제어는 매우 중요한 제어기술이다. 따라서, 본 논문에서는 시간지연과 불확실성이 포함된 시스템의 피드백 제어기를 설계하고, 시스템의 안정화 문제에 대해 연구한다.[1]

Ⅱ. 문제 설정

아래의 불확실성이 포함된 선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left(A+\Delta A(t)\right)x(t)+\left(A_d+\Delta A_d(t)\right)x\left(t-h(t)\right)\\ &\quad +\left(B+\Delta B(t)\right)u(t), \qquad (1)\\ x(s) &= \phi(s),\ s\in[-h_m,0].\end{aligned}$$

시스템 (1)의 $x(t)$는 상태 벡터를 의미한다. $u(t)$는 (1)에 포함되는 제어 입력이고, A, A_d, B 는 알고 있는 시스템 행렬이다.

불확실성 $\Delta A(t)$, $\Delta A_d(t)$, $\Delta B(t)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\left[\Delta A(t)\quad \Delta A_d(t)\quad \Delta B(t)\right]=DF(t)\left[E_s\quad E_d\quad E_u\right]. \qquad (2)$$

D, E_s, E_d, E_u 는 알고 있는 시스템 행렬이고 $F(t)$는 $F^T(t)F(t)\le I$ 를 만족하는 비선형 시변 행렬이다.
불확실성의 비선형성을 고려하기 위하여 식 (2)는 아 아래의 부등식을 만족한다.

$$DF(t)E+E^TF^T(t)D^T\le E^T\Theta E+D^T\Theta^{-1}D. \qquad (3)$$

시스템 (1)의 입력 $u(t)$에 상태 피드백 제어기를 설계하여 다시 정리하면 다음과 같은 입력 식과 시스템이 표현된다.

$$\begin{aligned}u(t) &= Kx(t),\\ \dot{x}(t) &= \left(A+\Delta A(t)+BK+\Delta B(t)K\right)x(t)+\left(A_d+\Delta A_d(t)\right)\\ &\quad \times x\left(t-h(t)\right). \qquad (4)\end{aligned}$$

결과를 유도하기 전에 아래의 보조정리를 제시한다.

보조정리 1. Wirtinger-based integral inequality [2]
보조정리 2. Reciprocally convex approach [3]
보조정리 3. Finsler's Lemma [4]

Ⅲ. 주요 결과

이번 장에서는 시스템 (4)에서 피드백제어기 설계를 위해 수학적인 관계를 유도할 것이다. 주요 결과를 소개하기 전에 행렬들을 다음과 같이 정의하여 요약한다.

$$\zeta(t)=col\left\{\zeta_1(t),\zeta_2(t)\right\},e_i=[0_{n\times(i-1)n},I_n,0_{n\times(11-i)n}]^T,(i=1,2,\cdots,11),$$
$$\zeta_1(t)=col\left\{x(t),x(t-h(t)),x(t-h_m),\dot{x}(t),\dot{x}(t-h_m)\right\},$$

$$\zeta_2(t)=col\left\{\int_{t-h(t)}^{t}x(s)ds,\int_{t-h_m}^{t-h(t)}x(s)ds,\frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^{t}\int_{s}^{t}x(u)duds,\right.$$
$$\left.\frac{1}{h_m-h(t)}\int_{t-h_m}^{t-h(t)}\int_{s}^{t-h(t)}x(u)duds,\frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^{t}x(s)ds,\frac{1}{h_m-h(t)}\int_{t-h_m}^{t-h(t)}x(s)ds\right\},$$
$$\eta_1=\left[e_1-e_2,e_6,-(e_1-e_2)+2(e_1-e_{10}),-e_6+2e_8\right],$$
$$\eta_1=\left[e_2-e_3,e_7,-(e_2-e_3)+2(e_2-e_{11}),-e_7+2e_9\right],$$
$$\Xi_1=Sym\left\{[e_1,e_6+e_7]R[e_4,e_1-e_3]^T\right\},$$
$$\Xi_2=e_4Ne_4^T-e_5Ne_5^T,$$
$$\Xi_{3[h(t)]}=[e_0,e_1]G[e_0,e_1]^T-(1-h_d)[e_1-e_2,e_2]G[e_1-e_2,e_2]^T$$
$$+Sym\left\{\left[h(t)e_1-e_6,e_6\right]G[e_4,e_0]^T\right\},$$
$$\Xi_4=h_m^{\,2}[e_4,e_1]Q[e_4,e_1]^T+h_m[e_1,e_2,e_3]P[e_1,e_2,e_3]^T-[\eta_1,\eta_2]\Omega[\eta_1,\eta_2]^T,$$
$$\Xi_5=Sym\left\{(e_1+e_4\delta)\left(-e_4^T+(AX+BY)e_1^T+A_dXe_2^T\right)\right\},$$
$$\Xi_{[h(t)]}=\Xi_1+\Xi_2+\Xi_{3[h(t)]}+\Xi_4+\Xi_5,$$
$$Q_{aug[i]}=Q+\begin{bmatrix}0_n & P_i\\ * & 0_n\end{bmatrix},\ \Lambda_i=diag\left\{Q_{aug[i]},3Q_{aug[i]}\right\}(i=1,2),$$
$$\Omega=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & S^T\\ S & \Lambda_2\end{bmatrix}.$$

정리 1. 양의 스칼라 δ, h_m, h_d와 양 한정 행렬 R, N, G, Q, 가 주어지고, 대각행렬 P_1, P_2 가 주어지고, 임의의 행렬 X, S, Y 가 존재할 때, 다음의 식 (5), (6)을 만족하면 시스템 (4)은 점근적으로 안정하다.

$$\left(\Gamma^{\perp}_{[h(t)=0]}\right)^T\Xi_{[h(t)=0]}\left(\Gamma^{\perp}_{[h(t)=0]}\right)<0, \tag{5}$$
$$\left(\Gamma^{\perp}_{[h(t)=h_m0]}\right)^T\Xi_{[h(t)=h_m]}\left(\Gamma^{\perp}_{[h(t)=h_m]}\right)<0,$$
$$\begin{bmatrix}\Lambda_1 & S^T\\ S & \Lambda_2\end{bmatrix}\geq 0. \tag{6}$$

제어이득은 $K=YX^{-1}$을 통해 얻을 수 있다.

증명. 다음과 같은 리아푸노프-크라소프스키 함수를 선정한다.

$$V=\begin{bmatrix}x(t)\\ \int_{t-h_m}^{t}x(s)ds\end{bmatrix}^T R\begin{bmatrix}x(t)\\ \int_{t-h_m}^{t}x(s)ds\end{bmatrix}+\int_{t-h_m}^{t}\dot{x}^T(s)N\dot{x}(s)ds$$
$$+\int_{t-h_m}^{t}\begin{bmatrix}\int_s^t x(u)du\\ x(s)\end{bmatrix}^T G\begin{bmatrix}\int_s^t x(u)du\\ x(s)\end{bmatrix}ds+h_m\int_{t-h_m}^{t}\int_s^t\begin{bmatrix}\dot{x}(u)\\ x(u)\end{bmatrix}^T Q$$
$$\times\begin{bmatrix}\dot{x}(u)\\ x(u)\end{bmatrix}duds. \tag{7}$$

식 (3)과 식 (4), 보조정리 1, 보조정리 2 을 이용하여, (7)에 대한 미분방정식을 정리하면 아래와 같다.

$$\dot{V}\leq\zeta^T(t)\Xi_{[h(t)]}\zeta(t). \tag{8}$$

시스템 (4)가 안정화하기 위하여 식 (8)이 음의 값을 갖는다면, 식(6)과 아래의 부등식이 보장되어야 한다.

$$\Xi_{[h(t)]}<0. \tag{9}$$

그리고 마지막으로, 식 (9)에 보조정리 3 을 활용하여 $\Gamma^{\perp}_{[h(t)]}$ 를 곱하여 주면 다음의 부등식으로부터 조건 (5) 이 유도된다.

$$\left(\Gamma^{\perp}_{[h(t)]}\right)^T\Xi_{[h(t)]}\left(\Gamma^{\perp}_{[h(t)]}\right)<0.$$

이것으로 정리 1 에 대한 증명을 마친다. ■

Ⅳ. 수치 예제

예제 1. 다음 행렬 및 값을 갖는 시스템 (4)을 고려하자.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},A_d=\begin{bmatrix}-2 & -0.5\\ 0 & -1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}D=0.2I_n,\\ E_s=E_d=I_n.\end{matrix}$$

정리 1 을 활용하여 얻어진 식을 시스템 (4)에 적용하고, 위 행렬 값과 δ=1.2, h_d = 1 일 때, 시스템의 최대 시간 지연과 제어 값을 구하면 h_m= 1.4650, K=10^6[-2.6514 -0.8786]^T 를 갖는다. 위의 값을 적용한 후 시간지연 $h(t)=cos(t)+h_m-1$, 시스템 초기 값은 다음과 같이 설정하였다. $x^T(0)$=[1, -1]^T.

그 결과로 시스템 (4)의 제어신호 상태 궤적 그림 1 의 그래프를 얻을 수 있다.

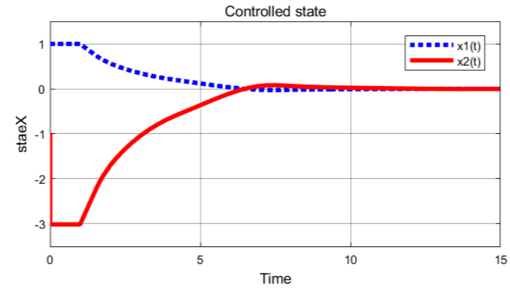

그림 1. 시스템의 제어신호 상태 궤적

Ⅴ. 결론

본 논문은 불확실성과 시간지연이 존재하는 선형 시스템의 안정화 문제에 대하여 피드백제어와 시간 지연 안정성 분석에 대하여 연구하였다. 위 방법을 수치 예제에 적용하여 정리 1 의 결과를 증명하였다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2020 년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No.2020R1A6A1A12047945, No.2020R1A6A3A01095821).

참 고 문 헌

[1] O.M. Kwon, M.J. Park, “Improved results on stability and stabilization criteria for uncertain linear systems with time-varying delays”, Int Journal of Computer Mathematics, vol.94, pp. 2435-2457, 2017.

[2] A. Seuret, F. Gouaisbaut, Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems, Automatica, vol.49, 2860-2866, 2013.

[3] P.G. Park, J.W. Ko and C. Jeong, Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays, Automatica, vol.47, 235-238, 2011.

[4] M.C. Oliveria, R.E. Skelton, Stability Tests for Constrained Linear Systems, Perspectives in robust control New York: Springer-Velag, 2001.