

# 합성 영등식 기법을 통한 시변 시간지연과 불확실성이 있는 루어 시스템에서의 안정성 판별법

김영재, 이용권, 이승훈, 권오민\*  
충북대학교

cel2020@cbnu.ac.kr, \*madwind@cbnu.ac.kr

## Stability criterion for Lur'e systems with time-varying delays and uncertainty utilizing the augmented zero equality approach

Kim Yeong Jae, Lee Yong Gwon, Lee Seung Hoon, Kwon Oh Min  
Chungbuk National Univ.

### 요 약

본 논문은 시간지연과 불확실성이 있는 루어 시스템에서 안정성 판별법을 제시하였다. 리아푸노프 안정성 이론을 이용하여 시스템의 안정성 조건을 유도하였다. 선형 행렬 부등식 (LMI) 형태로 유도하기 위해 적분 부등식들과 합성 영등식, Finsler 의 보조정리를 이용하였다. 마지막으로 수치 예제를 이용하여 제시된 기법이 유효함을 보였다.

### I. 서 론

네트워크 시스템, 공정 처리 시스템 등의 현실적인 시스템에서는 다양한 물리적인 제약으로 인하여 시간 지연이 발생한다. 이는 전체적인 시스템을 불안정하게 하거나 성능을 저하시키기 때문에, 시간지연이 있는 시스템의 안정성 해석 및 안정화에 대한 연구는 매우 중요하고 많이 연구되었다.

비선형 시스템을 다양한 방법으로 표현할 수 있다. 그 중 루어 시스템은 선형시스템에서 제약조건을 가지는 비선형 함수가 피드백이 된 형태로 구성되어 있다. 그리고 현실적인 시스템에서는 다양한 이유로 불확실성이 포함되어 있기에 불확실성과 시간지연이 있는 루어 시스템에서의 안정성 판별은 많이 연구되었다. [1,2]

그러므로, 본 논문에서는 위에서 설명한 루어 시스템의 안정성 판별법에 대해 서술할 것이다.

### II. 본론

시변 시간지연과 불확실성이 있는 루어 시스템을 다음과 같이 상태방정식의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-h(t)) + Bw(t) + Dp(t), \\ z(t) &= Cx(t) + C_d x(t-h(t)), \\ w(t) &= -\varphi(t, z(t)), \\ p(t) &= F(t)q(t), \\ q(t) &= E_a x(t) + E_b x(t-h(t)),\end{aligned}\quad (1)$$

$$0 \leq h(t) \leq h_M, \quad h_{Dl} \leq \dot{h}(t) \leq h_{Du}.$$

여기에서  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $w(t), z(t) \in \mathbb{R}^m$  은 시스템의 입력, 출력 벡터,  $\varphi(t, z(t))$  비선형 함수이며 다음을 만족한다.

$$[\varphi(t, z(t)) - K^- z(t)]^T [\varphi(t, z(t)) - K^+ z(t)] \leq 0$$

$A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C, C_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$  은 알고 있는 시스템 행렬,  $D \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $E_a, E_b \in \mathbb{R}^{s \times n}$  은 알고 있는 행렬이다.  $F(t) \in \mathbb{R}^{s \times s}$  는  $F^T(t)F(t) \leq I_s$  을 만족하는 불확실한 행렬이다.  $h_M, h_{Dl}, h_{Du}$  는 알고 있는 상수이다.

**보조정리 1.** Wirtinger-based integral inequality [3].

**보조정리 2.** Reciprocally convex approach [4].

### III. 주요 결과

본 장에서는 시스템 (1)의 안정성 판별을 위해 식을 유도할 것이다. 주요 결과를 소개하기 전에 유도되는 행렬을 간단하게 하기 위해 다음과 같은 정의를 한다.

$$\begin{aligned}\zeta_1(t) &= \text{col}\{x(t), x(t-h(t)), x(t-h_M), \dot{x}(t)\}, \\ \zeta_2(t) &= \text{col}\left\{\int_{t-h(t)}^t x(s)ds, \int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds\right\}, \\ \zeta_3(t) &= \text{col}\left\{\frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s)ds, \frac{1}{h_M - h(t)} \int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds\right\}, \\ \zeta_4(t) &= \text{col}\left\{\frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t x(u)duds, \frac{1}{h_M - h(t)} \int_{t-h_M}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} x(u)duds\right\}, \\ \zeta(t) &= \text{col}\{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \zeta_4(t), \omega(t), p(t)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_i &= [0_{n \times (i-1)n}, I_n, 0_{n \times ((10-i)n+m+s)}]^T, (i=1,2,\dots,10), \\
e_{11} &= [0_{m \times 10n}, I_m, 0_{m \times s}]^T, e_{12} = [0_{s \times (10n+m)}, I_s]^T, e_0 = 0_{(10n+m+s) \times n} \\
\eta &= [e_1 - e_2, e_5, -e_1 - e_2 + 2e_5, e_5 - 2e_7, \\
&\quad e_2 - e_3, e_6, -e_2 - e_3 - 2e_8, e_6 - 2e_{10}], \\
R_j &= R + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & P_j \\ P_j & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, (j=1,2), \\
\bar{R} &= \begin{bmatrix} \text{diag}\{R_1, 3R_1\} & S \\ S^T & \text{diag}\{R_2, 3R_2\} \end{bmatrix}, \\
\Xi_{1[h(t)]} &= \text{Sym}\{[e_1, e_5]P[e_4, e_1 - (1 - \dot{h}(t))e_2]^T\}, \\
\Xi_{2[h(t)]} &= [e_1, e_0]Q_1[e_1, e_0]^T - [e_3, e_5 + e_6]Q_1[e_3, e_5 + e_6]^T \\
&\quad + \text{Sym}\{[e_5 + e_6, h(t)e_9 + (h - h(t))(e_5 + e_{10})]Q_1[e_0, e_1]^T\}, \\
\Xi_{3[h(t), \dot{h}(t)]} &= [e_1, e_0]Q_2[e_1, e_0]^T - (1 - \dot{h}(t))[e_2, e_5]Q_2[e_2, e_5]^T \\
&\quad + \text{Sym}\{[e_5, h(t)e_9]Q_2[e_0, e_1]^T\}, \\
\Xi_4 &= h_M^2 [e_4, e_1]R[e_4, e_1]^T + h_M(e_1 P_1 e_1^T + e_2(P_2 - P_1)e_2^T - e_3 P_2 e_3^T), \\
\Xi_5 &= -2e_{11} U e_{11}^T - \text{Sym}\{e_{11} U K(Ce_1^T + C_d e_2^T)\}, \\
\Xi_6 &= (E_a e_1^T + E_b e_2^T)^T \Lambda (E_a e_1^T + E_b e_2^T) - e_{12} \Lambda e_{12}^T, \\
\Xi_{[h(t), \dot{h}(t)]} &= \Xi_{1[h(t)]} + \Xi_{2[h(t)]} + \Xi_{3[h(t), \dot{h}(t)]} + \Xi_4 + \Xi_5 + \Xi_6.
\end{aligned}$$

**정리 1.** 스칼라  $h, h_{Dl}, h_{Du}, K = K^+ - K^-$ 가 주어지고 다음의 LMI (2), (3)을 만족하는 양한정 행렬  $P, Q_1, Q_2, R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 임의 행렬  $S \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ , 그리고 양한정 대각행렬  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}, \Lambda \in \mathbb{R}^{s \times s}$ 이 존재하면 시스템 (1)는 점근적으로 안정하다.

$$(\Gamma_{[h(t)]}^\perp)^T (\Xi_{[h(t), \dot{h}(t)]} - \eta \bar{R} \eta^T) (\Gamma_{[h(t)]}^\perp) < 0, \quad (2)$$

$$\bar{R} > 0. \quad (3)$$

**증명.** 리아프노브-크라소브스키 함수를 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned}
V &= \xi_1^T P \xi_1 + \int_{t-h_M}^t \xi_2^T Q_1 \xi_2 ds + \int_{t-h(t)}^t \xi_2^T Q_2 \xi_2 ds, \\
&\quad + h_M \int_{t-h_M}^t \int_s^t \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \\ x(u) \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \\ x(u) \end{bmatrix} du ds, \\
\xi_1^T &= [x^T(t), \int_{t-h(t)}^t x^T(s) ds]^T, \xi_2^T = [x^T(s), \int_s^t x^T(u) du]^T.
\end{aligned}$$

보조 정리 1 과 보조 정리 2 을 이용하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{V} \leq \zeta^T(t) (\Xi_{[h(t), \dot{h}(t)]} - \eta \bar{R} \eta^T) \zeta(t).$$

마지막으로 [5]을 통해 augmented zero equality approach 를 이용하면 (2)을 얻을 수 있다. 따라서, 루어 시스템의 안정화 조건을 도출할 수 있다. ■

#### IV. 예제

아래의 시스템 행렬을 갖는 시스템을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.3 \quad 0.1], C_d = [0.1 \quad 0.2], K^- = 0.2, K^+ = 0.5,$$

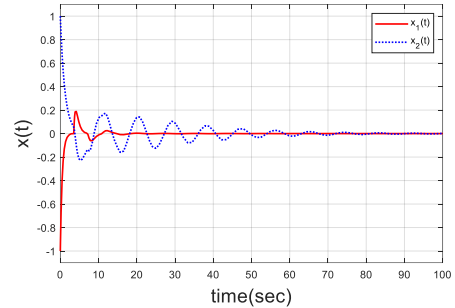
$$D = 0.1I_2, E_a = E_b = I_2.$$

제안한 방법의 우수성을 보이기 위해 이전의 결과들과 표 1 을 통하여 비교하였다. 또한 결과의 유효함을 보이기 위하여  $h(t) = 2 + 0.49 \cos(1.22t)$ ,  $\varphi(t, z(t)) = \text{atan}(0.5z(t))$ ,  $x(0) = [-1, 1]$ 을 조건으로 하여 그림 1 에 시스템의 상태 궤

적을 보였다. 상태 궤적이 수렴함을 통해  $h_M = 2.49$   $h_D = 0.6$ 일 때, 시스템이 안정함을 볼 수 있다.

**표 1.**  $h_D$ 에 따른 최대 지연 범위  $h_M$  ( $h_D = -h_{Dl} = h_{Du}$ )

$h_D$	0	0.3	0.6	변수의 개수
Xiao[1]	4.3332	2.6873	2.2021	$17n^2 + 4n$
Liu[2]	4.3956	2.9358	2.4721	$127.5n^2 + 13.5n$
정리 1	5.5510	3.3999	2.4939	$25n^2 + 5n$



**그림 1.** 시스템의 상태 궤적

#### V. 결론

본 논문은 합성된 리아프노브 함수법을 이용하여 시간 지연과 불확실성이 있는 루어 시스템의 안정성 판별법을 제시하였다. 적절한 리아프노브 함수들을 선정하고 몇 개의 보조 정리와 영등식을 이용하여 LMI 형태로 구성하였고, Finsler 의 보조정리를 통하여 안정성 조건을 유도하였다. 마지막으로, 간단한 수치 예제를 통하여 기존의 결과보다 우수함을 보였다.

#### ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2020년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2020R1A6A1A12047945, No.2020R1A6A3A01095821).

#### 참고 문헌

- [1] Xiao S-P, Liu X., Zhang C-F, Zeng H-B, "Further results on absolute stability of Lur'e systems with a time-varying delay", Neurocomputing, vol.207, pp. 823-827, 2016.
- [2] Liu B., Zeng H-B, "New Absolute Stability Conditions of Lur'e Systems with Time-Varying Delay", Journal of Control Science Engineering", 2015.
- [3] P.G. Park, "Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems", Journal of The Franklin Institute, vol. 352, pp. 1378-1396, 2015.
- [4] P.G. Park, J.W. Ko and C. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays", Automatica, vol.47, pp. 235-238, 2011.
- [5] O.M. Kwon, S.H. Lee, M.J. Park, S.M. Lee, "Augmented zero equality approach to stability for linear systems with time-varying delay", Applied Mathematics and Computation, vol.381, 2020.