접힌 정규분포를 이용한 신호 대 잡음 비 추정

*송건호, *김윤지, *윤동원†, **현광민
*한양대학교, **강릉원주대학교
dwyoon@hanyang.ac.kr†

Estimation of Signal-to-Noise Ratio Using Folded Normal Distribution

*Song Geon Ho, *Kim Yoon Ji, *Yoon Dong Weon† , **Hyun Kwang Min*
*Hanyang Univ., **Gangneung-Wonju National Univ.

요 약

비협력 통신 상황에서는 수신기에서 송신 신호의 파라미터를 알지 못하기 때문에 수신 신호의 신호 대 잡음 비(signal-to-noise ratio, SNR)를 정확하게 알기 어렵다. 본 논문은 이러한 비협력 상황에서 접힌 정규분포의 최대 우도 추정(maximum likelihood estimation, MLE) 기법을 이용하여 수신 신호의 SNR 을 추정하는 간단한 알고리즘을 제안한다. 또한 제안한 알고리즘의 타당성을 컴퓨터 모의실험을 통해 검증한다.

Ⅰ. 서론

비협력 통신 상황에서는 수신 신호를 이용하여 송신기에서 사용한 통신 파라미터를 추정하여야 하며, 수신 신호의 신호 대 잡음 비(signal-to-noise ratio, SNR)가 중요한 추정 파라미터가 될 수 있다[1]. 본 논문에서는 수신 신호의 SNR 을 수신 신호의 확률밀도함수(probability density function, PDF)를 이용하여 추정하는 간단한 방법을 제안하고 이를 컴퓨터 모의실험을 통해 검증한다.

Ⅱ. 본론

본 논문에서는 변조 방식으로 M-PSK 및 M-QAM 을, 송신 신호가 전파되는 채널로 additive white Gaussian noise (AWGN) 채널을 가정한다. 신호를 수신한 뒤 정합 필터링을 수행하여 출력된 신호를 이산적인 형태로 표현하면, k 번째 수신 심볼 G_k 를 식 (1)의 랜덤 프로세스로 정의할 수 있다.

$$G_k = S_k + N_k \tag{1}$$

여기서 S_k 는 송신 심볼을 의미하며, 변조 방식에 따라 달라진다. N_k 는 다음과 같은 독립적으로 동일하게 분포된(independent and identically distributed, i.i.d.) 랜덤 시퀀스(random sequence)이다.

$$N_k = N_k^{(I)} + jN_k^{(Q)} \tag{2}$$

표기 $X_k^{(I)}$, $X_k^{(Q)}$ 는 각각 X_k 의 in-phase 성분 및 quadrature-phase 성분을 의미하며, $N_k^{(I)}$, $N_k^{(Q)}$ 는 모두 평균이 0, 분산이 σ^2 인 정규분포를 따른다.

식 (1)은 다음과 같은 복소수로 표현할 수 있다.

$$G_k = G_k^{(I)} + jG_k^{(Q)} = \left(S_k^{(I)} + N_k^{(I)}\right) + j\left(S_k^{(Q)} + N_k^{(Q)}\right) \tag{3}$$

$G_k^{(I)}$, $G_k^{(Q)}$, $S_k^{(I)}$, $S_k^{(Q)}$ 는 모두 i.i.d. 랜덤 시퀀스이다. 본 논문에서는 직교 위상 편이 변조(quadrature phase shift keying, QPSK)의 예시를 통해 SNR 추정 방법에 대해 설명한다. QPSK 송신 심볼 S_k 는 다음과 같다.

$$S_k = \sqrt{2}ae^{j\theta_i},\ \theta_i \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\} \tag{4}$$

여기서 $\sqrt{2}a$ 는 송신 신호의 진폭을 의미한다.

식 (4)에 의해, $S_k^{(I)}$ 와 $S_k^{(Q)}$ 의 확률질량함수(probability mass function, PMF)는 다음과 같다.

$$p_{S_k^{(j)}}\left(s_k^{(j)}\right) = \begin{cases} P^{(j)}, & s_k^{(j)} = a \\ 1 - P^{(j)}, & s_k^{(j)} = -a \\ 0, & s_k^{(j)} \notin \{a, -a\} \end{cases},\quad j = I, Q \tag{5}$$

여기서 $P^{(I)} = P_1 + P_4$, $P^{(Q)} = P_1 + P_2$ 이며 $P_i\ (i = 1,2,3,4)$ 는 식 (5)에서 $\theta_i = \frac{(2i-1)\pi}{4}$ 일 확률을 의미한다.

식 (2)로부터 $N_k^{(I)}$, $N_k^{(Q)}$ 의 PDF는 식 (6)과 같다.

$$f_{N_k^{(j)}}\left(n_k^{(j)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left[n_k^{(j)}\right]^2}{2\sigma^2}},\quad j = I, Q \tag{6}$$

따라서, S_k 와 N_k 의 평균 전력 S_{power} , N_{power} 는 다음과 같다.

$$S_{power} = E\left[\left|S_k^{(I)}\right|^2\right] + E\left[\left|S_k^{(Q)}\right|^2\right] \tag{7a}$$

$$N_{power} = E\left[\left|N_k^{(I)}\right|^2\right] + E\left[\left|N_k^{(Q)}\right|^2\right] \tag{7b}$$

여기서 연산자 $E[\cdot]$ 는 랜덤 변수의 기댓값을 의미한다. 식 $(7a) = 2a^2$, $(7b) = 2\sigma^2$ 이므로, SNR 은 다음과 같다.

$$\frac{S_{power}}{N_{power}} = \frac{a^2}{\sigma^2} \tag{8}$$

비협력 통신 상황에서는 a 와 σ^2 의 정확한 값을 알 수 없으므로 식 (8)을 이용할 수 없다. 따라서, a 와 σ^2 을 추정하여 식 (7)를 통해 SNR을 추정해야 한다.

a 와 σ^2 을 추정하기 위해 $G_k^{(I)}$, $G_k^{(Q)}$ 의 PDF 를 구하면 그 식은 다음과 같다.

$$f_{G_k^{(j)}}\left(g_k^{(j)}\right) = \frac{P^{(j)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(g_k^{(j)}-a\right)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1-P^{(j)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(g_k^{(j)}+a\right)^2}{2\sigma^2}}, j = I, Q \tag{9}$$

식 (9)는 $P^{(j)}$ 에 따라 달라지는 식으로, $P^{(j)}$ 를 알 수 없는 비협력 통신 상황에서는 식 (9)를 이용하여 a 와 σ^2 을 추정하기 어렵다. 이를 해결하기 위해, $G_k^{(j)}$ 의 크기 $\left|G_k^{(j)}\right|$ 의 PDF를 이용한다. $\left|G_k^{(j)}\right|$ 의 PDF를 구하면 다음의 접힌 정규분포를 얻을 수 있다.

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w-a)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w+a)^2}{2\sigma^2}}, W = \left|G_k^{(I)}\right|, \left|G_k^{(Q)}\right| \tag{10}$$

식 (10)은 a 와 σ^2 만의 식이므로 이로부터 a 와 σ^2 을 추정하기 용이하다.

식 (10)의 a 와 σ^2 을 추정하기 위해서 최대 우도 추정(maximum likelihood estimation, MLE) 기법[2]을 사용한다. 식 (10)의 W 의 샘플 W_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ 에 대한 로그 우도는 다음과 같다.

$$L = -\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \sum_{k=1}^{N}\frac{(W_k - a)^2}{2\sigma^2} + \sum_{k=1}^{N}\ln\left(1 + e^{-\frac{2aW_k}{\sigma^2}}\right) \tag{11}$$

L 이 최대가 될 때, 다음의 식 (12), (13)이 성립한다.

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(W_k - a) - \frac{2}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{W_k}{1 + e^{\frac{2aW_k}{\sigma^2}}} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{k=1}^{N}(W_k - a)^2 + \frac{2a}{\sigma^4}\sum_{k=1}^{N}\frac{W_k}{1 + e^{\frac{2aW_k}{\sigma^2}}} = 0 \tag{13}$$

식 (12), (13)을 모두 만족하는 a 와 σ^2 을 구하는 해석적인 방법은 알려져 있지 않다. 따라서 본 논문에서는 수치 해석적인 방법을 이용한다. 식 (12)를 식 (13)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\sigma^2 = -a^2 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}W_k^2 \tag{14}$$

식 (12), (14)를 이용하여 a 와 σ^2 을 추정하는 알고리즘을 다음과 같이 구성할 수 있다. 여기서 $Var[W_k]$ 는 W_k 의 분산을 의미한다.

알고리즘 1 a 와 σ^2 의 추정 알고리즘

1: $\sigma^2 \leftarrow Var[W_k]$

2: $a \leftarrow \left(a \middle| \frac{\partial L}{\partial a} = 0\right)$

3: $\sigma^2 \leftarrow \left(-a^2 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}W_k^2\right)$

4: 2, 3을 n_{iter} 회 반복

결과적으로, 알고리즘 1을 수행하여 얻은 a, σ^2 은 각각 식 (5)의 a 와 식 (6)의 σ^2 의 추정값이 된다. 따라서, 식 (7)에 의해 다음과 같은 SNR의 추정값을 얻을 수 있다.

$$\hat{s} = \frac{a_I^2 + a_Q^2}{\sigma_I^2 + \sigma_Q^2} \tag{15}$$

여기서 $\left(a_I, \sigma_I^2\right)$, $\left(a_Q, \sigma_Q^2\right)$ 는 각각 $G_k^{(I)}$ 와 $G_k^{(Q)}$ 의 a 와 σ^2 의 추정값의 순서쌍을 의미한다.

본 논문의 아이디어와 알고리즘 1을 컴퓨터 모의실험을 통해 검증하면 다음과 같다. $a = 1/\sqrt{2}$, $n_{iter} = 1000$ 으로 설정하여, -5dB부터 5dB까지 1dB 간격의 SNR마다 실험을 진행한다. 각각의 SNR마다 알고리즘 1을 100번 실행하여 100개의 $\hat{s}$ 을 구하고, 이들의 정규화된 평균 제곱 오차(normalized mean square error, NMSE)을 성능 평가 지표로 사용한다. 그림 1은 $N = 100, 1000, 10000$ 일 때의 NMSE를 나타낸 그림이다. 여기서 N 이 클수록, SNR이 클수록 NMSE가 작아지는 것을 확인할 수 있다.

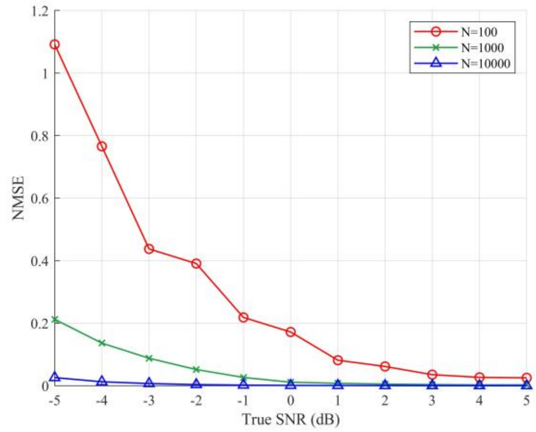

그림 1. $N = 100, 1000, 10000$ 일 때의 NMSE

III. 결론

본 논문에서는 비협력 통신 상황에서 접힌 정규분포를 이용하여 송신 신호의 파라미터를 추정하여 수신 신호의 SNR 을 추정하는 알고리즘을 제안하고, 이를 컴퓨터 모의실험을 통하여 검증하였다. 모의 실험 결과 수신 신호의 샘플 수가 많을수록, SNR 이 높을수록 추정이 정확해지는 것을 확인하였다. 본 논문에서는 QPSK 의 예를 들어 설명을 하였으나, 이때의 아이디어를 일반적인 M-PSK, M-QAM 신호에 적용하여 확장할 수 있다.

ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 과학기술정보통신부 및 정보통신기획평가원의 대학 ICT 연구센터육성지원사업의 연구결과로 수행되었음(IITP-2021-2017-0-01637).

참 고 문 헌

[1] B. Sklar, Digital Communications, NJ, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988.

[2] M. Tsagris, C. Beneki, and H. Hassani, “On the folded normal distribution,” *Mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 12-28, 2014.