고유값 문제를 이용한 빔포밍 방식 최적화 연구

김근영, 명정호, 고영조
한국전자통신연구원

kykim12@etri.re.kr, jhmyung@etri.re.kr, koyj@etri.re.kr

Optimizing Beamforming Using the Eigenvalue Problem

Keunyoung Kim, Jung Ho Myung, Young-Jo Ko
Electronics and Telecommunications Research Institute

요 약

송수신 빔포밍 방식의 대표적인 방식으로 자기 신호 전력 최대화하는 maximum ratio combining 방식, maximum ratio transmission 방식, 간섭 신호를 zero-forcing 방식이 있다. 널리 알려진 완결된 방식으로, 다양한 최적화 문제로 해석되어 서로 연관 관계가 없어 보인다. 본 논문에서는 고유값 문제로 이러한 대표적인 빔포밍 방식들을 설정할 수 있음을 보인다. 서로 다른 방식처럼 보이는 빔포밍 방식에 대해, 동일한 방식으로 문제를 설정하고 이를 풀기 위한 통일된 최적화 방식을 제시하여, 각 빔포밍 방식에 작용하는 커다란 연관 관계를 조망할 수 있도록 한다. 이를 통해 보다 복잡한 다양한 무선채널 환경에서 빔포밍 최적화 문제를 더 쉽게 접근할 수 있을 것으로 예상된다.

Ⅰ. 서 론

무선통신시스템에서 전송율 향상을 위한 가장 중요한 기술 중 하나는 다중안테나를 이용하여 다수 데이터를 동일한 시간과 주파수 자원에 동시에 전송하는 것이다. 다수 데이터를 효율적으로 전송하고 수신하기 위해서는, 송수신기간 채널정보를 활용하여, 자기 신호 전력은 최대화하고, 간섭 신호 전력은 최소화해야 한다. 자기 신호 전력을 최대화하는 수신 빔포밍 방식은 maximum ratio combining (MRC), 송신 빔포밍 방식은 maximum ratio transmission (MRT)이며, 간섭 신호 전력을 최소하하는 송수신 빔포밍 방식은 zero-forcing (ZF)이다 [1]. 이러한 방식은 여러 논문이나 교과서에서 기술되어 널리 알려진 완결된 방식으로 다양한 최적화 문제를 통해 동일한 결과들을 도출할 수 있다.

다양한 최적화 문제로 해석된 완결된 방식이라 하더라도, 서로 다른 방식처럼 보이는 빔포밍 방식에 대해, 동일한 방식으로 문제를 설정하고 이를 풀기 위한 통일된 최적화 방식을 제시한다면, 각 빔포밍 방식에 작용하는 커다란 연관 관계를 조망할 수 있게 되고, 이를 통해, 보다 복잡한 다양한 무선채널 환경에서 발생하는 문제를 더 쉽게 접근할 수 있게 된다.

본 논문에서는 각 빔포밍 방식에 대한 커다란 연관 관계를 이해하는 수단으로, MRC, MRT, ZF 방식을 통일된 고유값 문제 최적화 방식을 활용하여 도출하는 방안을 다룬다. 자기 신호 최대화 혹은 간섭 신호 최소화 빔포밍 방식을 도출하기 위한 송수신기 각각 역할을 동일한 방식으로 문제 설정하고, 동일한 방식으로 해를 도출한다

Ⅱ. 본론

본 논문에서는 M 개의 다중안테나를 가진 하나의 송신기가, N 개의 다중안테나를 가진 하나의 수신기에 데이터를 전송하는 무선통신시스템을 고려한다. 송신기는 D개의 데이터로 구성된 신호벡터 $\mathbf{s}$는 평균 0, 분산 벡터는 단위행렬인 복소가우시안 분포를 가진다고 가정한다. 신호벡터 $\mathbf{s}$는 송신 빔포밍 행렬 $\mathbf{G}$를 통해 전송하고, 각 데이터에 p_i, i=1, 2,⋯,D 전력을 할당한다. 즉, 송신기를 통해 전송되는 전송신호 벡터 $\mathbf{x}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{D}\sqrt{p_i}s_i\mathbf{g}_i=\mathbf{GPs},\quad \mathbb{E}[\mathbf{ss}^\dagger]\sim\mathcal{CN}(\mathbf{0},\mathbf{I}) \tag{1}$$

여기서, $\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\ldots,\sqrt{p_D})$ 인 대각행렬이다. 본 논문에서는 전력할당 문제가 아닌 빔포밍 방식 최적화가 목적이므로, 최적화 수식에서 $\mathbf{P}$는 단위행렬로 가정한다.

점대점 NxM 다중안테나 채널을 통한 신호 $\mathbf{y}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}=\mathbf{HGPs}+\mathbf{z} \tag{2}$$

여기서, z는 가우시안 잡음이다. 즉, $\mathbf{z}\sim\mathcal{CN}(\mathbf{0},\mathbf{I})$ 이라고 가정한다.

수신빔포밍 행렬 $\mathbf{F}^\dagger$를 통한 D 개의 수신신호는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{s}}=\mathbf{F}^\dagger\mathbf{y}=\mathbf{F}^\dagger\mathbf{HGPs}+\mathbf{F}^\dagger\mathbf{z} \tag{3}$$

여기서 $\mathbf{F}^\dagger$는 $\mathbf{F}$의 conjugate transpose를 의미한다.

수신 신호 전력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{tr}(\mathbf{F}^\dagger\mathbf{HGPss}^\dagger\mathbf{P}^\dagger\mathbf{G}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F})]&=\mathrm{tr}(\mathbb{E}[\mathbf{F}^\dagger\mathbf{HGPss}^\dagger\mathbf{P}^\dagger\mathbf{G}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F}])\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{F}^\dagger\mathbf{HGP}\mathbb{E}[\mathbf{ss}^\dagger]\mathbf{P}^\dagger\mathbf{G}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F})\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{F}^\dagger\mathbf{HGPP}^\dagger\mathbf{G}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F})\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{F}^\dagger\mathbf{HGP}^2\mathbf{G}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F})\end{aligned} \tag{4}$$

수신 잡음 전력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{tr}(\mathbf{F}^\dagger\mathbf{zz}^\dagger\mathbf{F})]&=\mathrm{tr}(\mathbb{E}[\mathbf{F}^\dagger\mathbf{zz}^\dagger\mathbf{F}])\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{F}^\dagger\mathbb{E}[\mathbf{zz}^\dagger]\mathbf{F})\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F})\end{aligned} \tag{5}$$

i 번째 수신 신호 전력은 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_i^\dagger \mathbf{H}\mathbf{G}\mathbf{P}^2\mathbf{G}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{D} p_j \mathbf{f}_i^\dagger \mathbf{H}\mathbf{g}_j\mathbf{g}_j^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^\dagger\left(\sum_{j=1}^{D} p_j\mathbf{H}\mathbf{g}_j\mathbf{g}_j^\dagger\mathbf{H}^\dagger\right)\mathbf{f}_i$$
$$= \underbrace{p_i \mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i}_{\text{signal related to symbol } i} + \underbrace{\mathbf{f}_i^\dagger\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_j \mathbf{H}\mathbf{g}_j\mathbf{g}_j^\dagger\mathbf{H}^\dagger\right)\mathbf{f}_i}_{\text{interference not related to symbol } i} \quad (6)$$

MRC 로 알려진 자기 신호를 최대화하는 수신 빔포밍 방식은 다음과 같은 고유값 최대화 문제로 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{f}_i = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $\mathbf{g}_i$와 $\mathbf{f}_i$는 송신 빔포밍 행렬 $\mathbf{G}$, 수신 빔포밍 행렬 $\mathbf{F}$의 i 번째 열벡터를 의미한다.
i 번째 데이터를 전송하기 위해 주어진 $\mathbf{g}_i$에 대한 최적 수신 빔포밍 벡터 $\mathbf{f}_i$는 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_1(\mathbf{H}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{H}^\dagger) = \frac{\mathbf{H}\mathbf{g}_i}{\|\mathbf{H}\mathbf{g}_i\|} \quad (8)$$

여기서, $\mathrm{e}_i(\mathbf{A})$는 행렬 $\mathbf{A}$ 의 i 번째로 큰 고유값에 대응되는 고유벡터를 의미한다.

MRT 로 알려진 자기 신호를 최대화하는 송신 빔포밍 방식은 다음과 같은 고유값 최소화 문제로 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_i \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{g}_i = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

i 번째 데이터를 수신하기 위해 주어진 $\mathbf{f}_i$에 대한 최적 송신 빔포밍 벡터 $\mathbf{g}_i$는 다음과 같다.

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_1(\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}) = \frac{\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i}{\|\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i\|} \quad (10)$$

수신시 다른 신호로 부터 받는 간섭신호 전력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^\dagger\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_j\mathbf{H}\mathbf{g}_j\mathbf{g}_j^\dagger\mathbf{H}^\dagger\right)\mathbf{f}_i &= \sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_j\mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_j\mathbf{g}_j^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i \\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_j|\mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_j|^2 \\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_j|\mathbf{g}_j^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

ZF 로 알려진 수신되는 간섭 신호를 최소화하는 수신 빔포밍 방식은 다음과 같은 고유값 최대화 문제로 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{G}_{i=\mathbf{0}}(\mathbf{G}_{i=\mathbf{0}})^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_i \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{f}_i = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $\mathbf{G}_{i=0}$는 행렬 $\mathbf{G}$의 i번째 열에 영벡터를 대입한 행렬을 의미한다.
최적 수신 빔포밍 벡터 $\mathbf{f}_i$는 다음과 같이 left null space 벡터로 주어진다.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_D(\mathbf{H}\mathbf{G}_{i=\mathbf{0}}\mathbf{G}^\dagger_{i=\mathbf{0}^\dagger}\mathbf{H}^\dagger), \cdots, \mathbf{f}_i = \mathbf{e}_N(\mathbf{H}\mathbf{G}_{i=\mathbf{0}}\mathbf{G}^\dagger_{i=\mathbf{0}^\dagger}\mathbf{H}^\dagger),$$
$$\text{equivalently, } \mathbf{f}_i \in \mathcal{N}(\mathbf{G}^\dagger_{i=\mathbf{0}^\dagger}\mathbf{H}^\dagger) \quad (13)$$

여기서, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$는 행렬 $\mathbf{A}$의 null space를 의미한다.
일반적으로 알려진 간섭 최소화 수신 빔포밍 방식을 다음과 같은 왼쪽 의사 역행렬로 주어진다.

$$\mathbf{F}^\dagger_{\text{pinv}} = \left(\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^\dagger \quad (14)$$

식 (13)와 식 (14)을 통한 수신 빔포밍 방식이 다른 방식으로 보이지만, 식 (13)을 통해 수신되는 간섭신호는 다음과 같이 0이 되므로, 식 (13)은 왼쪽 의사 역행렬인 식 (14)의 일반적인 형태라고 할 수 있다. 즉, 식 (14)의 각 열의 norm이 1이 되도록 하면, 식 (13)와 같게 된다.

$$\mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{G}_{i=\mathbf{0}} = \mathbf{0}^\dagger \Longrightarrow \mathbf{f}_i^\dagger\mathbf{H}\mathbf{I}_{i=\mathbf{0}} = \mathbf{0}^\dagger \Longrightarrow \mathbf{F}^\dagger_{\text{ginv}} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}_1^\dagger \\ \mathbf{f}_2^\dagger \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N^\dagger\end{bmatrix} \quad (15)$$

송신시 다른 신호에 미치는 간섭신호 전력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_i\mathbf{f}_j^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_j &= p_i\mathbf{g}_i^\dagger\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{D}\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_j\mathbf{f}_j^\dagger\mathbf{H}\right)\mathbf{g}_i \\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_i|\mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{f}_j|^2 \\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{D} p_i|\mathbf{f}_j^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_i|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

ZF 로 알려진 송신되는 다른 신호에 미치는 신호를 최소화하는 송신 빔포밍 방식은 다음과 같은 고유값 최소화 문제로 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F}_{i=\mathbf{0}}(\mathbf{F}_{i=\mathbf{0}})^\dagger\mathbf{H}\mathbf{g}_i \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{g}_i^\dagger\mathbf{g}_i = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

최적 송신 빔포밍 벡터 $\mathbf{g}_i$는 다음과 같이 null space 벡터로 주어진다.

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_D(\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F}_{i=\mathbf{0}}(\mathbf{F}_{i=\mathbf{0}})^\dagger\mathbf{H}), \cdots, \mathbf{g}_i = \mathbf{e}_M(\mathbf{H}^\dagger\mathbf{F}_{i=\mathbf{0}}(\mathbf{F}_{i=\mathbf{0}})^\dagger\mathbf{H})$$
$$\text{equivalently, } \mathbf{g}_i \in \mathcal{N}(\mathbf{F}^\dagger_{i=\mathbf{0}^\dagger}\mathbf{H}) \quad (18)$$

간섭 최소화 수신 빔포밍 방식과 비슷하게, 간섭을 최소화 하는 송신 빔포밍 방식은 일반적으로 다음과 같은 오른쪽 의사 역행렬로 주어진다.

$$\mathbf{G}_{\text{pinv}} = \mathbf{H}^\dagger\left(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger\right)^{-1} \quad (19)$$

식 (18) 역시, 아래와 같이 간섭을 0으로 하기 때문에 식 (19)의 일반화된 형태로 볼 수 있다.

$$\mathbf{F}^\dagger_{i=\mathbf{0}^\dagger}\mathbf{H}\mathbf{g}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{I}^\dagger_{i=\mathbf{0}^\dagger}\mathbf{H}\mathbf{g}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{G}_{\text{ginv}} = [\mathbf{g}_1 \ \ \mathbf{g}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{g}_M] \quad (20)$$

Ⅲ. 결론

본 논문에서는 자기 신호 최대화, 간섭 신호 최소화를 위한 송수신 빔포밍 방식을 고유값 문제를 이용하여 도출하였다. 이를 통해 빔포밍 방식에 대한 커다란 연관 관계를 파악할 수 있다. 본 문제를 확장하면, 신호대간섭잡음비 최대화 문제를 일반화된 고유값 문제에 적용할 수 있다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2020 년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2019-0-00002,[전문연구실]초정밀 서비스 실현을 위한 On-Time·On-Rate 무선액세스 및 광에지 클라우드 네트워킹 핵심기술 개발)

참 고 문 헌

[1] David Tse and Pramod Vismwnath, Fundamentals of Wireless Communication, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2005.