

# Single Graph Coloring Problem에 적용한 양자 검색 알고리즘의 복잡도 감소 기법

서영진, 강유진, 박정훈, 허준

고려대학교

cherishiz@korea.ac.kr, yujin20@korea.ac.kr, zucht@korea.ac.kr, junheo@korea.ac.kr

## 요 약

본 논문은 양자 검색 알고리즘을 이용하여 Single Graph Coloring Problem을 낮은 복잡도로 해결하는 방법을 제안한다. 또한 Single Graph Coloring Problem 해의 집합이 W State와 유사함을 이용하여, W state 기반의 양자 검색 알고리즘을 Single Graph Coloring Problem에 적용할 수 있음을 보인다.

## I. 서 론

양자 검색 알고리즘[1-2]은 1996년 Lov Grover에 의해 고안된 양자 알고리즘이며, 양자 검색 알고리즘은 unsorted data set에서 특정한 data를 찾아내는 알고리즘이다.  $N$  개의 data set에서 양자 검색 알고리즘은  $O(\sqrt{N})$ 의 반복 복잡도를 갖는다.

Graph Coloring Problem은 고전 컴퓨터로 해결하기에 높은 복잡도를 갖고 있는 NP-Complete Problem에 속해있는 문제이다. 본 논문에서는 Graph Coloring Problem을 양자 검색 알고리즘으로 해결하는 기법[3]을 이용하여 양자 검색 알고리즘에 W State를 적용한 낮은 복잡도의 양자 검색 알고리즘 설계 기법을 제안한다.

## II. 본론

### A. 양자 검색 알고리즘

양자 검색 알고리즘은  $f(x) = 1$ 을 만족하는  $x \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ 에 대해서  $O(\sqrt{N})$ 의 복잡도로  $x$ 를 찾는 알고리즘이다.

양자 검색 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

i) Initialization

$|0\rangle$ 에  $H^{\otimes n}$ 을 연산하여  $N$ 개의 중첩된 양자 상태를 준비한다.

$$|\psi\rangle = H^{\otimes n}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$$

ii) Oracle

$f(x) = 1$ 을 만족하는  $x$ 에 대해  $|x\rangle$ 의 위상을 반전한다. Oracle 함수  $O$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$O|x\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle, \quad x = 0, 1, \dots, N-1$$

iii) Amplitude amplification

Amplitude amplification 과정은 oracle 단계에서 위상 반전된 양자 상태의 확률을 증폭시키는 단계이다. Amplitude amplification 단계의 연산  $A$ 는 다음과 같다.

$$A = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$$

양자 검색 알고리즘은 oracle과 amplitude amplification 단계를 반복하고 양자 상태를 측정하여 결과를 얻는다.

### B. Single Graph Coloring Problem

Single Graph Coloring Problem은 임의의 그래프  $G = (V, E)$ 와 상수  $k$ 가 주어졌을 때, 인접한 vertex는 같은 색으로 칠하지 않고 모든 vertex를 오직 한 가지 색으로만 칠하는 문제를 의미한다. 여기서  $V$ 는 vertex set를,  $E$ 는 edge set를 의미하며,  $k$ 는 그래프  $G$ 에 칠할 수 있는 색의 수를 의미한다.

### C. 제안 기법

Graph Coloring Problem을 양자 검색 알고리즘으로 풀 때, 각 vertex는  $k$ 개의 큐비트에 대응된다[3]. 따라서 Single Graph Coloring Problem에서 각 vertex는  $k$ 개의 큐비트를 갖고,  $k$ 개의 큐비트 중 한 개의 큐비트만 “1”이고 다른 큐비트는 “0”인 양자 상태가 답이 된다.

W State는  $N_w$ 개의 큐비트 중에서 한 개의 큐비트만 “1”이고 다른 큐비트는 “0”인 양자 상태의 모든 경우가 중첩된 양자 상태이다. 이를 식으로 표현하면, W State는 다음과 같은 양자 상태의 형태로 표현할 수 있다.

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_w}}(|10\dots 0\rangle + |01\dots 0\rangle + \dots + |00\dots 1\rangle)$$

Single Graph Coloring Problem의 각 vertex의  $k$ 개의 큐비트가  $2^k$ 개의 양자 상태로 중첩되지 않고 W State로 중첩될 경우, 각 vertex의 양자 상태 수는  $2^k$ 개에서  $k$ 로 감소한다. 이를 통해 양자 검색 알고리즘의 복잡도는 감소될 수 있다.

## III. 결론

본 논문에서는 Single Graph Coloring Problem에 적용한 W State 기반의 양자 검색 알고리즘 설계 기법을 제안하였다. 양자 검색 알고리즘에 W State를 초기 양자 상태로 사용할 경우 입력 상태의 수가 감소된다. 양자 검색 알고리즘의 복잡도는 입력 상태의 수가  $N$ 일 때,  $O(\sqrt{N})$ 으로 정의된다. 즉, 입력 상태의 수가 감소될 경우 양자 검색 알고리즘의 복잡도도 감소된다.

## ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 과학기술정보통신부 및 정보통신기획평가원의 대학ICT연구센터 지원사업의 연구결과로 수행되었음 (IITP-2020-2015-0-00385)

## 참 고 문 헌

- [1] L. Grover. "Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack," Phys. Rev. Lett., 79(2):325(328), 1997.
- [2] L. Grover. "Quantum Computers Can Search Rapidly by Using Almost Any Transformation," Phys. Rev. Lett., 80(19):4329(4332), 1998.
- [3] Y. Seo. "Design of Grover Search Algorithm Applied to Graph Coloring Problem," Proceedings of Symposium of the Korean Institute of communications and Information Sciences, 76-77, 2020.