

# AWGN 채널을 가정한 16-QAM의 성상도 최적화

홍성민, 박정훈, 함도영, 김성철

서울대학교 전기정보공학부 뉴미디어통신공동연구소

{smhongok, hoon0337, wj2dy, sckim}@maxwell.snu.ac.kr

## Optimization of 16-QAM Constellations with AWGN Channel

Seongmin Hong, Jeong-Hoon Park, Doyoung Ham, Seong-Cheol Kim

INMC and Department of Electrical and Computer Engineering, Seoul Nat'l Univ.

### 요약

본 논문은 16-QAM(Quadrature Amplitude Modulation)의 가산성 백색 가우시안 잡음 채널에서 비트 오류율을 개선하기 위한 성상도 최적화 방법을 제시하였다. 제시된 목적함수가 볼록(Convex)임을 증명하고, 여러 신호 대 잡음비에 대해 최적해를 도출하여 성상도(Constellations)를 모델링한다. 16-QAM의 성상도와 비트 오류율, 심볼 오류율을 계산하여 성상도 변형이 비트 오류율을 최소화함을 증명하였다.

### I. 서론

직교 진폭 변조(Quadrature Amplitude Modulation, QAM) 방식은 현재 많은 무선통신 표준에서 널리 사용되는 변조 방식이다. QAM은 독립된 2개의 반송파를 이용하는데, 진폭과 위상의 변화를 이용하여 복소 평면상의 점으로 심볼을 대응시킨다. 현재 사용되고 있는 QAM의 심볼들은 등간격으로 배치되어 있어, 간단한 방식으로 복조(Demodulation)가 가능하지만 채널 용량과 비트 오류율(Bit Error Rate, BER) 관점에서의 최적 배치는 아니다. 본 논문에서는 현재 등간격으로 심볼이 배치되어 있는 QAM의 성상도를 변형하여 통신의 성능을 최대화하는 방법을 제시한다. 특히, 비트 인터리브 된 부호화 변조(Bit-Interleaved Coded Modulation, BICM)를 함께 고려하여 QAM의 성상도를 변형하면 채널 용량을 증대시킬 수 있다는 사실이 전산 실험을 통해 연구된 바 있다[1,2]. 그러나 BICM과 같은 채널 부호화와 독립적으로 고려된 QAM 성상도의 최적화에 대한 연구는 아직 많이 수행되지 않았으며, QAM 성상도의 최적화 문제의 볼록 여부에 대한 연구 또한 이루어진 바 없다.

본 논문에서는 16-QAM의 성상도를 변형시켜 가산성 백색 가우시안 잡음(Additive White Gaussian Noise, AWGN) 채널에서 비트 오류율을 최적화하는 문제를 정의하고, 볼록 최적화 문제임을 증명한다. 또한 여러 신호 대 잡음비(Signal-to-Noise Ratio, SNR)에 대해 정의된 문제의 해를 도출하여 16-QAM의 성상도를 제시하여 비트 오류율, 심볼 오류율(Symbol Error Rate, SER)이 개선됨을 증명한다.

### II. 본론

#### 가) 16-QAM의 성상도 모델

본 논문에서 다루는 16-QAM의 성상도 모델은 그림 1과 같다. 비트 오류율을 최소화한다고 알려진 매핑인 그레이 코드를 사용한다. 성상이 실수축과 허수축에 대해 대칭이고 90도 회전변환에도 일정할 때, 모델은 그림 1의  $y_1, y_2$ 라는 2가지 변수로 표현 될 수 있다. 이 때 본 모델의 비트당 평균 에너지  $E_b$ 은 식 (1)과 같다.

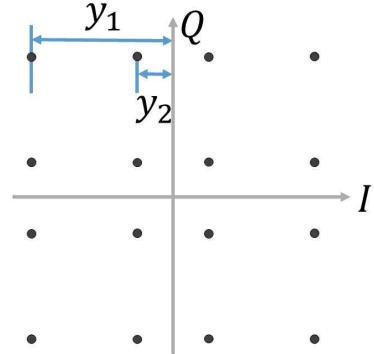


그림 1 16-QAM의 성상도 모델

$$E_b = (y_1^2 + y_2^2)/4 \quad (1)$$

분산이 1인 AWGN을 본 모델에 적용하면, [3]에 의하여 정확한 비트 오류율  $P_b$ 는 다음과 같다.

$$P_b = \frac{1}{8} \times [\operatorname{erfc}(y_1) + \operatorname{erfc}(y_2) + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{y_1 + 3y_2}{2}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{3y_1 + y_2}{2}\right)] \quad (2)$$

이 때  $\operatorname{erfc}$ 는 가우스 여오차 함수이며 식 (3)과 같이 정의된다.

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$y_1 > y_2$ 이므로 식 (1)을 만족하도록 변수  $\theta$ 를 정의하면 본 모델을 최적화 하는 문제는 식 (4),(5)와 같다.

$$\underset{y_1, y_2 \in \mathbb{R}}{\operatorname{minimize}} \quad P_b(y_1, y_2) \quad (4)$$

$$\text{subject to} \quad y_1 = 2\sqrt{E_b} \cos \theta, y_2 = 2\sqrt{E_b} \sin \theta, \quad 0 < \theta < \pi/4 \quad (5)$$

나) 16-QAM의 성상도 최적화 문제의 볼록성 증명  
위 최적화 문제가 볼록 최적화 문제이기 위한 충분조건은,  $P_b$ 를  $\theta$ 에 대한 일변수 함수로 나타냈을 때  $\frac{d^2P_b}{d\theta^2} > 0$ 을 만족하는 것이다. 아래 식

(6)~(10)은  $\frac{d^2P_b}{d\theta^2}$ 의 각 항을 이루는 성분이다.

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \text{erfc}(y_1) = 2\sqrt{E_b} \cos\theta (1+8E_b \sin^2\theta) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y_1^2} \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \text{erfc}(y_2) = 2\sqrt{E_b} \sin\theta (1+8E_b \cos^2\theta) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y_2^2} \quad (7)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \text{erfc}\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) = \sqrt{E_b} (\cos\theta - \sin\theta) \quad (8)$$

$$\times (1+2E_b(\cos\theta + \sin\theta)^2) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(y_1 - y_2)^2}{2}} \quad (8)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \text{erfc}\left(\frac{y_1 + 3y_2}{2}\right) = \sqrt{E_b} (\cos\theta + 3\sin\theta) \quad (9)$$

$$\times (1+2E_b(3\cos\theta - \sin\theta)^2) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(y_1 + 3y_2)^2}{2}} \quad (9)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \text{erfc}\left(\frac{3y_1 + y_2}{2}\right) = \sqrt{E_b} (3\cos\theta + \sin\theta) \quad (10)$$

$$\times (1+2E_b(\cos\theta - 3\sin\theta)^2) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(3y_1 + y_2)^2}{2}} \quad (10)$$

이 때, 식 (6)~(10)에 의하여  $P_b$ 는 볼록이기 위한 충분조건을 만족한다.

#### 다) 16-QAM 성상도 최적화 문제의 해결

본 문제가 볼록 최적화 문제이므로, 최적해를 구할 수 있다. 비트 당 신호 대 잡음비( $E_b/N_0$ )에 따른 최적해  $y_2/y_1 = \tan\theta$ 는 그림 2 와 같다. Conventional은 등간격 배치의 QAM 성상도의 값인  $y_2/y_1 = 1/3$  이다.

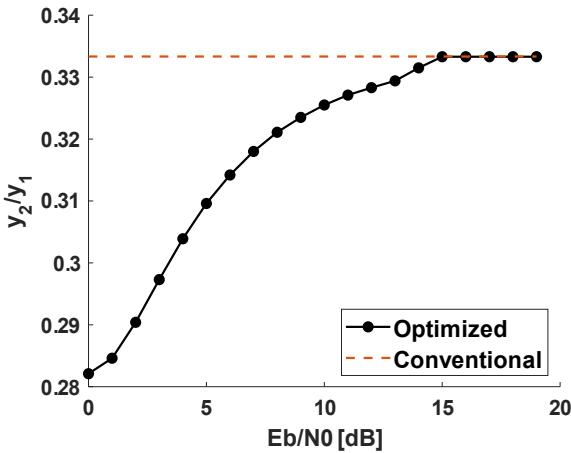


그림 2 비트당 SNR에 대한 16-QAM 성상도 최적해

심볼을 등간격으로 배치하는 기존의 16-QAM 성상은 인접한 심볼끼리 만 오류가 발생하는 경우를 가정했을 때 최적이다. 하지만  $E_b/N_0$ 가 낮을 경우에는 떨어져 있는 심볼 간에도 오류가 발생하기 때문에 모든 오류를 고려하는 식 (2)를 이용하는 것이 비트 오류율을 더 낮출 수 있다. 그럼 2에서  $E_b/N_0$ 가 낮은 경우에는 최적해가 기존 성상에서 벗어나고,  $E_b/N_0$ 가 높은 경우에는 기존 성상으로 수렴하는 모습을 볼 수 있다. 또한 이 때 원래 QAM 성상도에 대한 본 성상도의 비트 오류율의 비율

(%)은  $E_b/N_0$ 에 따라 그림 3 과 같다. 각  $E_b/N_0$ 에 따라  $10^8$ 번 시뮬레이션 하였고, 비트 오류율에 대해서 이론값이 실험값과 일치함을 확인하였다. 그래프에는 실험값을 나타내었다.

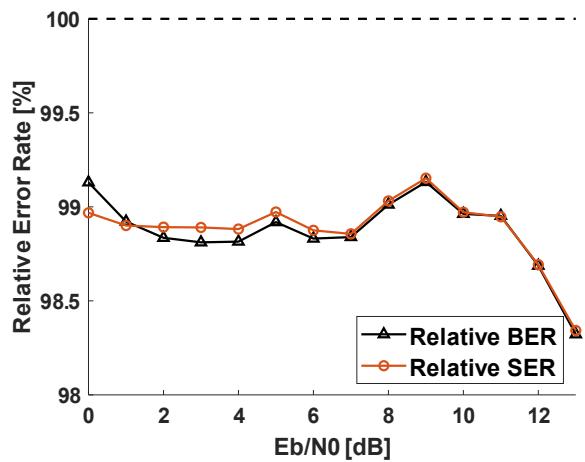


그림 3 비트 당 SNR에 대한 상대 오류율

비트 오류율과 심볼 오류율 모두 상대적으로 99% 정도를 보이는데, 이는 본 논문의 16-QAM의 성상도 개선은 같은 채널에서 오류율이 1% 감소한다는 의미이다.

### III. 결론

본 논문에서는 16-QAM의 성상도를 변형시켜 AWGN 채널에서 비트 오류율을 최적화하는 문제를 정의하고, 그 문제가 볼록 최적화임을 증명하였다. 또한 여러  $E_b/N_0$ 에 대해 최적해를 도출하여 변형된 성상도를 제시하였으며, 등간격 성상도 대비 비트 오류율, 심볼 오류율은 약 1% 개선됨을 확인하였다.

### ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2020년도 두뇌한국21플러스사업에 의하여 지원되었음.

### 참 고 문 헌

- [1] J. Zoellner and N. Loghin, "Optimization of high-order non-uniform QAM constellations," 2013 IEEE International Symposium on Broadband Multimedia Systems and Broadcasting (BMSB), London, 2013, pp. 1-6.
- [2] Arim Lee, Donghoon Kang and Wangrok Oh, "Optimization of 16-QAM constellation for binary polar codes", The Journal of Korea Information and Communications Society (KCIS), vol. 43, no. 08, pp. 1237-1242, Aug. 2018.
- [3] Dongweon Yoon, Kyongkuk Cho and Jinsook Lee, "Bit error probability of M-ary quadrature amplitude modulation," Vehicular Technology Conference Fall 2000. IEEE VTS Fall VTC2000. 52nd Vehicular Technology Conference (Cat. No.00CH37152), Boston, MA, USA, 2000, pp. 2422-2427 vol.5.