

# Toeplitz 공분산을 이용한 고속 WL 빔포밍

최 양 호\*

## Fast WL Beamforming Using Toeplitz Covariance

Yang-Ho Choi\*

요 약

ULA(uniform linear array)에 도래하는 신호가 서로 상관돼 있지 않고 엄격한 비회전(strictly noncircular)일 때, 빠르게 수렴할 수 있는 WL(widely linear) 빔포밍(beamforming) 기법을 제안한다. 도래신호가 상관돼 있지 않아 어레이 공분산행렬은 대각요소들이 같은 Toeplitz 형태로 주어지고, 관계행렬(relation matrix)은 반대각 요소들이 같게 된다. 본 논문에서는 기존 방식에서 사용하는 확장샘플행렬(extended sample matrix)을 이들 성질에 따라 수정하여 새로운 확장샘플행렬을 구성한다.  $l_1$ -norm 견지에서 수정 확장행렬은 기존 확장행렬보다 작은 오류를 가지며, 유니타리(unitary) 행렬을 이용하여 실수행렬로 변환될 수 있다. 이 실수행렬을 고유분해하여 수정 확장행렬의 고유치, 고유벡터를 효율적으로 계산하고, 원하는 신호에 대한 확장조향벡터를 잡음부공간과의 직교성에 기반하여 구한 후, 추정된 신호부공간에서 가중벡터를 얻는다. 시뮬레이션 결과는 제안방식이 기존 WL 빔포밍 방식보다 매우 빠른 정상상태(steady state)로의 수렴속도를 보이면서 수정된 확장샘플행렬의 이용에 따른 효과를 보여준다.

**Key Words** : Beamforming, Widely linear, Toeplitz rectification, Signal subspace, Noncircular

### ABSTRACT

When the signals impinging on a uniform linear array (ULA) are strictly noncircular and uncorrelated with each other, this paper proposes a WL (widely linear) beamforming method that can provide fast convergence. As the incident signals are uncorrelated the elements along each diagonal of the array covariance matrix, which has a Toeplitz form, are equal while the elements along each antidiagonal of the relation matrix become identical. In this paper, the extended sample matrix (ESM) conventionally used is rectified according to the properties of equality. It is shown that in terms of the  $l_1$ -norm the rectified ESM has less error than the conventional one and that it is transformed into a real matrix by using a unitary matrix. The eigenvalues and eigenvectors of the ESM are efficiently obtained from the eigen-decomposition of the real matrix. The extended steering vector for the desired signal is estimated based on the fact that it is orthogonal to the noise subspace. Then, the weight vector is found such that it lies in an estimated signal subspace. Simulation results demonstrate that the proposed WL beamforming method provides much faster convergence speed to the steady state than the conventional ones, thereby showing the effectiveness of the rectification.

\* First Author : Kangwon National University, Dept. of Electrical and Electronic Engineering, yhochoi@kangwon.ac.kr, 종신회원

\* 강원대학교 전기전자공학과 yhochoi@kangwon.ac.kr, 정회원

논문번호 : 202502-023-B-RN, Received February 2, 2025; Revised April 6, 2025; Accepted April 18, 2025

## I. 서론

적응 빔포머(adaptive beamformer)는 원하는 신호에 대한 정보를 이용하여 원하는 신호는 보호하면서 간섭신호를 제거한다. MVDR(minimum variance distortionless response) 방식에서는 원하는 신호에 대한 조향벡터(steering vector)를 이용, 이 방향으로 단위 빔 이득 제한 아래 출력 전력이 최소가 되도록 빔포머를 제어한다. 해당 방식은 원하는 신호에 대한 도래각 정보가 정확하다면 빔포머는 최적 성능을 제공할 수 있지만, 오류가 있으면 심각한 성능저하를 초래할 수 있다<sup>11</sup>.

센서 어레이(sensor array)에 도래하는 신호가 비회전(noncircular) 이면 WL(widely linear) 방식을 도입해서 빔포머의 성능을 좋게 할 수 있다<sup>12-121</sup>. BPSK(binary phase shift keying), ASK(amplitude shift keying)처럼 비회전 신호의 복소 포락선(complex envelope) 제공의 평균은 0이 아니다. 이러한 비회전 신호는 디지털 통신에서 널리 사용되고 있다. 일반 적응 빔포머에서는 실제 어레이 센서에 수신된 신호만을 이용한다. 그러나 신호가 비회전이면 복소켄레(complex conjugate) 신호로부터 실제 신호를 추출할 수 있어, WL 방식에서는 실제 신호의 수신벡터와 이의 복소켄레를 연결한 확장수신벡터를 이용하여 성능개선을 도모한다.

확장수신벡터를 이용함에 따라 WL 방식에서는 원하는 신호에 대한 확장조향벡터를 구하는 것이 필요하다. 확장조향벡터를 구하려면 도래각 정보뿐만 아니라 비회전 계수를 추정해야한다. 비회전 계수를 종종 출력 전력 최대화에 기반하여 구하고 있다<sup>14-10</sup>. 이 방법은 도래각을 정확히 알고 있더라도 정확하게 비회전 계수를 구할 수 없는 한계가 있다. 확장조향벡터 추정에 더해 간섭잡음행렬도 추정하여 오류에 강인하고 빠른 수렴속도를 얻을 수 있으나 많은 계산이 소요된다<sup>7-11</sup>.

본 논문에서는 ULA(uniform linear array)에 도래하는 신호가 엄격하게 비회전이고 서로 상관돼 있지 않을 때, 빠른 수렴속도를 가질 수 있는 포인팅 오류에 강인한 WL 빔포밍 방식을 제안한다. 신호가 상관돼 있지 않으면 수신신호 공분산행렬은 Toeplitz 구조를 가져 대각 요소들은 서로 같고, 또한 관계행렬(relation matrix)<sup>1131</sup>의 반대각 요소들도 서로 같다. 기존 방식에서 사용하는 확장샘플행렬을 이의 성질에 따라 수정한다. 수정된 확장행렬은 원 행렬보다  $l_1$ -norm 견지에서 오류가 작음을 증명한다. 또한 유리터리 행렬(unitary matrix)을 이용하여 수정 확장샘플행렬이 실수행렬로 변환됨을 보인다.

실수행렬로 변환은 효율적인 계산을 가능하게 한다. 제안방식에서는 이 실수행렬의 고유분해로부터 수정 확장샘플행렬의 고유치, 고유벡터를 구하여, 직접 구하는 방식에 비해 계산량을 절감한다. 수정 확장샘플행렬의 고유분해를 이용하여, 원하는 신호에 대한 확장조향벡터는 잡음부공간에 직교하는 MUSIC(multiple signal classification)<sup>114</sup> 원리에 기초해서 이를 구하고, 추정된 신호부공간에서 가중벡터를 계산한다. 시뮬레이션 결과는 제안방식이 매우 빠르게 수렴하여 간섭잡음행렬을 구하는 계산이 복잡한 방식과 유사한 성능을 보이며, 수정 확장행렬 사용의 효과를 나타낸다.

논문을 통해 사용하는 기호, 표기들은 다음과 같다. 위 첨자  $T, *$ ,  $H$ 는 각각 전치(transpose), 복소켄레, 복소켄레전치 연산,  $E[\cdot]$ 는 기대치 연산을,  $\text{Re}, \text{Im}$ 은 복소수의 실수부, 허수부를 나타낸다. 행렬, 벡터는 각각 대문자, 소문자 굵은체로 나타내고,  $\mathbf{I}$ 는 적절한 크기의 단위행렬이다.  $|\cdot|, \|\cdot\|$ 는 각각  $l_1, l_2$ -norm을 의미한다.

## II. 시스템 모델링

$M$ 개의 센서로 구성된 ULA 어레이에  $K$ 개의 협대역 신호가  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{K_T})$ 로부터 도래한다. 여기서  $K_T$ 는 간섭신호의 수로  $K_T = K - 1$ 이고,  $\theta_0, \theta_i$ 는 각각 원하는 신호와  $i$ 번째 간섭신호의 도래각이다. 이들 신호의 복소 포락선은  $s_0(t), s_i(t)$ 이다. 도래각  $\theta$ 에 대한 조향벡터를  $\mathbf{a}(\theta)$ 로 나타낸다.  $M \times K$  조향벡터행렬은

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_{K_T})] \quad (1)$$

와 같이 주어지고, 어레이에 수신된 신호는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{s}(t) = [s_0(t), s_1(t), \dots, s_{K_T}(t)]^T$ ,  $\mathbf{n}(t)$ 는 잡음벡터이다.  $\mathbf{x}(t)$ 는 평탄 페이딩(flat fading) 채널을 통해 수신된 신호로 볼 수 있다.

도래하는 신호는 비회전 계수의 크기가 1인 엄격한 비회전 신호로 초기위상은  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{K_T})$ 이다.

이때  $\mathbf{s}(t)$ 는

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\xi}(t) \quad (3)$$

와 같이 나타낼 수 있고

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\phi}) = \text{diag} [e^{j\phi_0}, e^{j\phi_1}, \dots, e^{j\phi_{K_f}}] \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = [\xi_0(t), \xi_1(t), \dots, \xi_{K_f}(t)]^T \quad (5)$$

이며,  $\boldsymbol{\xi}(t)$ 는 실수벡터이다.  $s_k(t)$  ( $k=0, 1, \dots, K_f$ )의 비회전 계수  $\gamma_k$ 는  $\gamma_k = E[s_k^2(t)]/p_k$ 와 같이 정의되고,  $p_k = E[s_k(t)s_k^*(t)]$ 이다.  $s_k(t)$ 는 엄격한 비회전 신호이고, 식 (3)에 따라  $\gamma_k = e^{j2\phi_k}$ 와 같이 주어진다. 도래하는 신호는 상관돼 있지 않아 상관행렬  $\mathbf{R}_\xi = E[\boldsymbol{\xi}(t)\boldsymbol{\xi}^T(t)]$ 는 대각행렬로 주어진다. 잡음은 가우시안 랜덤 프로세스로 센서 간에 서로 상관되어 있지 않고  $E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma^2\mathbf{I}$ 이고,  $\sigma^2$ 은 잡음전력이다.

WL 방식에서는  $\mathbf{x}(t)$ 와 이의 복소켈레를 연결한 확장수신벡터  $\mathbf{x}'(t)$ 를 이용하여 어레이 출력을 얻는다. 식 (2) - (5)로부터

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^*(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{n}'(t) \quad (6)$$

처럼 쓸 수 있다. 여기서  $\mathbf{n}'(t) = [\mathbf{n}^T(t), \mathbf{n}^H(t)]^T$ 이고,  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$ 는 확장조향벡터 행렬로

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}) = [\mathbf{a}(\theta_0, \phi_0), \mathbf{a}(\theta_1, \phi_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_{K_f}, \phi_{K_f})] \quad (7)$$

$$\mathbf{a}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} e^{j\phi} \mathbf{a}(\theta) \\ e^{-j\phi} \mathbf{a}^*(\theta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

이다.  $\mathbf{x}'(t)$ 에 대한 공분산행렬은

$$\mathbf{R}_{x'} = E[\mathbf{x}'(t)\mathbf{x}'^H(t)] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{C}_x \\ \mathbf{C}_x^* & \mathbf{R}_x^* \end{bmatrix} \quad (9)$$

와 같고

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \quad (10)$$

$$\mathbf{C}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] \quad (11)$$

이다.  $\mathbf{R}_\xi$ 가 대각행렬이어서 정규 공분산행렬  $\mathbf{R}_x$ 는 Toeplitz 행렬로 주어지고 관계행렬  $\mathbf{C}_x$ 의 반대각 요소들은 서로 같다.

확장 어레이에 수신된 신호를 가중하여 어레이 출력 신호  $z(t)$ 를 얻는다. 출력신호  $z(t)$ 는

$$z(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}'(t) \quad (12)$$

와 같이 주어지고,  $\mathbf{w}$ 는 가중벡터이다. 어레이 출력전력  $p_{out}$ 은

$$p_{out} = E[z(t)z^*(t)] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{x'} \mathbf{w} \quad (13)$$

와 같다. 확장조향벡터  $\mathbf{a}(\theta_0, \phi_0)$ 를  $\mathbf{a}_0$ 로 간략히 표기한다. WL-MVDR에서는 원하는 신호 방향에 대한 빔 크기를 단위이득으로 제한하면서 출력전력  $p_{out}$ 이 최소가 되도록 가중벡터를 설정한다. 이때 가중벡터는

$$\mathbf{w}_o = \mu \mathbf{R}_{x'}^{-1} \mathbf{a}_0 \quad (14)$$

와 같이 구해지고, 상수  $\mu$ 는 단위이득 제한에 따라  $\mu = 1/\mathbf{a}_0^H \mathbf{R}_{x'}^{-1} \mathbf{a}_0$ 으로 주어진다. 최적 가중벡터  $\mathbf{w}_o$ 는 어레이 출력에서 SINR(signal-to-interference-plus-noise ratio)을 최대로 한다.

최적 가중벡터  $\mathbf{w}_o$ 를 고유공간에서 표현할 수 있다. Hermitian 행렬  $\mathbf{R}_{x'}$ 을 고유분해하여

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x'} &= \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^H \\ &= \mathbf{E} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{E}^H = \mathbf{E}_s \boldsymbol{\Lambda}_s \mathbf{E}_s^H + \mathbf{E}_n \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{E}_n^H \end{aligned} \quad (15)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $\lambda_m, \mathbf{e}_m$ 은 고유치, 고유벡터 쌍이고,  $\boldsymbol{\Lambda}$ 는 대각행렬로 대각요소는 고유치로 구성되며  $\mathbf{E}$ 는 고유벡터 행렬이다. 고유치는 내림차순으로 배열되어 있고 대각행렬  $\boldsymbol{\Lambda}_s$ 는 처음  $K$ 개의 고유치로 구성되고  $\mathbf{E}_s$ 는 대응하는 고유벡터 행렬이다.  $\boldsymbol{\Lambda}_n$ 은 나머지 고유치로 구성되고  $\mathbf{E}_n$ 은 대응하는 고유벡터 행렬이다.  $\mathbf{E}_s, \mathbf{E}_n$ 의 고유벡터가 생성하는 공간을 각각 신호부공간, 잡음부공간이라 부른다. 신호부공간은  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$ 의 열벡터가 생성하는 공간과 같다. 확장조향벡터  $\mathbf{a}_0$ 는 신호부공간에 놓여있고, 잡음부공간과 직교한다. 즉,  $\mathbf{E}_n^H \mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ 이다. 식 (15)를 (14)에 대입하여 가중벡터는

$$\mathbf{w}_o = \mu \mathbf{E}_s \boldsymbol{\Lambda}_s^{-1} \mathbf{E}_s^H \mathbf{a}_0 \quad (16)$$

와 같이 표현되고, 이때  $\mu = 1/\mathbf{a}_0^H \mathbf{E}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{E}_s^H \mathbf{a}_0$  으로 주어진다.

### III. Toeplitz 공분산을 이용한 WL 빔포밍

#### 3.1 Toeplitz 공분산에 따른 샘플행렬의 수정

실제의 경우, 정규 공분산행렬  $\mathbf{R}_x$ , 관계행렬  $\mathbf{C}_x$  를 데이터 샘플로부터 추정해야 한다.  $N$ 개의 스냅샷이 있다면  $\mathbf{R}_x, \mathbf{C}_x$  는

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \quad (18)$$

과 같이 추정할 수 있다. 이들로부터 공분산행렬  $\mathbf{R}_x$  을 추정할 확장샘플행렬  $\hat{\mathbf{R}}_x$  을 (9)에 의거하여 구할 수 있다. 종래의 방식에서는  $\hat{\mathbf{R}}_x$  을 이용하나,  $\mathbf{R}_x$  의 대각 요소들이 같고  $\mathbf{C}_x$  의 반대각 요소들이 같은 성질에 따라  $\hat{\mathbf{R}}_x, \hat{\mathbf{C}}_x$  를 수정하여 빔포머의 성능을 향상시킬 수 있다.

$\mathbf{R}_x$  에서 각각의 대각을 따라 놓여 있는 요소들은 서로 같다. 즉,

$$r_{11} = r_{2(l+1)} = \dots = r_{(M-l+1)M} \quad (19)$$

여기서  $r_{pq}$  는 Hermitian 행렬  $\mathbf{R}_x$  의  $(p, q)$  요소이고,  $r_{pq} = r_{qp}^*$  이다. 위 식에서  $l = 1$  이면 주대각요소를,  $2 \leq l \leq M$  이면 부대각요소를 나타낸다. 제안방식에서는 (19)의 관계에 근거하여  $\hat{\mathbf{R}}_x$  로부터 수정행렬  $\bar{\mathbf{R}}_x$  를 구한다<sup>[15,16]</sup>.

$$\bar{r}_{1l} = \frac{1}{M-l+1} \sum_{i=1}^{M-l+1} \hat{r}_{i(i+l-1)} \quad (20)$$

$$\bar{r}_{1l} = \bar{r}_{2(l+1)} = \dots = \bar{r}_{(M-l+1)M} \quad (21)$$

$$\bar{r}_{lk} = \bar{r}_{kl}^*, \quad k < l \quad (22)$$

여기서  $\bar{r}_{pq}, \hat{r}_{pq}$  은 각각  $\bar{\mathbf{R}}_x, \hat{\mathbf{R}}_x$  의  $(p, q)$  요소이다. 관계행렬  $\mathbf{C}_x$  에서는 반대각요소는 같고, 이에 따라  $\hat{\mathbf{C}}_x$  로

부터 수정행렬  $\bar{\mathbf{C}}_x$  를 구한다.  $\bar{\mathbf{C}}_x, \hat{\mathbf{C}}_x$  의  $(p, q)$  요소는 각각  $\bar{c}_{pq}, \hat{c}_{pq}$  이다.  $\bar{\mathbf{C}}_x$  의 위 삼각행렬에서  $k$  번째 반대각은  $p+q=k+1$  인  $\bar{c}_{pq}$  로 구성된다.  $k=1$  인 경우, 반대각은  $\bar{c}_{11}$  하나로 주어진다.  $\bar{\mathbf{C}}_x$  의 위 삼각행렬에서  $k$  번째 반대각을 구성하는 요소들은 아래 식과 같이 계산된다<sup>[15]</sup>.

$$\bar{c}_{1k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{c}_{i(k-i+1)} \quad (23)$$

$$\bar{c}_{1k} = \bar{c}_{2(k-1)} = \dots = \bar{c}_{k1} \quad (24)$$

$\bar{\mathbf{C}}_x$  의 아래 삼각행렬은  $p+q > M+1$  인  $\bar{c}_{pq}$  요소들로 주어진다. 아래 삼각행렬의 반대각 요소가 같도록 유사하게  $\bar{c}_{pq}$  를 계산할 수 있다.  $\bar{\mathbf{R}}_x, \bar{\mathbf{C}}_x$  를 구하면 수정 확장샘플행렬  $\bar{\mathbf{R}}_x$  을

$$\bar{\mathbf{R}}_x = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_x & \bar{\mathbf{C}}_x \\ \bar{\mathbf{C}}_x^* & \bar{\mathbf{R}}_x \end{bmatrix} \quad (25)$$

와 같이 구성한다.

$\mathbf{R}_x, \mathbf{C}_x$  를 추정할  $\hat{\mathbf{R}}_x, \hat{\mathbf{C}}_x$  는 이들 행렬과 똑같지 않고 오류를 가지고 있다. Toeplitz 수정을 한  $\bar{\mathbf{R}}_x$  은  $\hat{\mathbf{R}}_x$  보다  $l_1$ -norm의 관점에서 오류가 작아짐을 보일 수 있다. 다음 부등식을 증명하는 것은 어렵지 않다<sup>[16]</sup>.

$$|\bar{\mathbf{R}}_x - \mathbf{R}_x| \leq |\hat{\mathbf{R}}_x - \mathbf{R}_x| \quad (26)$$

$\mathbf{C}_x$  에 대해서도 유사한 관계를 유도할 수 있다.  $\mathbf{C}_x, \hat{\mathbf{C}}_x, \bar{\mathbf{C}}_x$  의 위 삼각행렬에서  $k$  번째 반대각을 순서대로  $\mathbf{c}_k, \hat{\mathbf{c}}_k, \bar{\mathbf{c}}_k$  로 표시한다. 예를 들어,  $\mathbf{c}_k$  은  $\mathbf{c}_k = [c_{1k}, c_{2(k-1)}, \dots, c_{k1}]^T$  와 같이 주어진다. 식 (23), (24)로부터

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{c}}_k - \mathbf{c}_k| &= \sum_{i=1}^k |\bar{c}_{i(k-i+1)} - c_{i(k-i+1)}| \\ &= k |\bar{c}_{1k} - c_{1k}| \\ &= \left| \sum_{i=1}^k (\hat{c}_{i(k-i+1)} - c_{i(k-i+1)}) \right| \end{aligned} \quad (27)$$

와 같고

$$|\hat{\mathbf{c}}_k - \mathbf{c}_k| = \sum_{i=1}^k \left| \hat{c}_{i(k-i+1)} - c_{i(k-i+1)} \right| \quad (28)$$

이다. 식 (27), (28)로부터  $|\bar{\mathbf{c}}_k - \mathbf{c}_k| \leq |\hat{\mathbf{c}}_k - \mathbf{c}_k|$ 임을 쉽게 알 수 있다.  $\mathbf{C}_x, \hat{\mathbf{C}}_x, \bar{\mathbf{C}}_x$ 의 아래 삼각행렬에서  $k$ 번째 반대각을  $\mathbf{c}_k, \hat{\mathbf{c}}_k, \bar{\mathbf{c}}_k$ 로 나타낸다. 예를 들어,  $\mathbf{c}_k = [c_{(k+1)M}, c_{(k+2)(M-1)}, \dots, c_{M(k+1)}]^T$ 이다. 아래 삼각행렬에 대해서도  $|\bar{\mathbf{c}}_k - \mathbf{c}_k| \leq |\hat{\mathbf{c}}_k - \mathbf{c}_k|$ 임을 유사하게 보일 수 있다. 따라서

$$|\bar{\mathbf{C}}_x - \mathbf{C}_x| \leq |\hat{\mathbf{C}}_x - \mathbf{C}_x| \quad (29)$$

이다. 임의행렬  $\mathbf{V}$ 에 대해  $|\mathbf{V}| = |\mathbf{V}^*|$  이고, 식 (26), (29)에 따라

$$|\bar{\mathbf{R}}_{x'} - \mathbf{R}_{x'}| \leq |\hat{\mathbf{R}}_{x'} - \mathbf{R}_{x'}| \quad (30)$$

의 부등 관계를 가진다. 식 (29)가 등호 관계에 있으려면,  $k=1, \dots, M$  모두에 대해 (27)이 (28)과 같아야 한다. 유사하게 식 (26)이 등호 관계를 가지려면, 모든  $l=1, \dots, M$ 에 대해  $|\bar{\mathbf{r}}_l - \mathbf{r}_l| = |\hat{\mathbf{r}}_l - \mathbf{r}_l|$ 이어야 한다. 여기서  $\mathbf{r}_l, \hat{\mathbf{r}}_l, \bar{\mathbf{r}}_l$ 은  $\mathbf{R}_{x'}, \hat{\mathbf{R}}_{x'}, \bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 의  $l$ 번째 대각이다. 이러한 등호 관계를 가질 확률은 실질적으로 0이고,  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 에서 오류는  $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 에서의 오류보다 작다.

### 3.2 수정행렬의 효과적인 고유분해

아래  $2M \times 2M$  유니터리 행렬  $\mathbf{\Pi}$ 를 이용해서 켈레 대칭성을 갖는 확장수신벡터  $\mathbf{x}'(t)$ 를 실수벡터로 변환할 수 있다.

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & j\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -j\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$\mathbf{x}'(t)$ 에  $\mathbf{\Pi}$ 의 켈레전치를 곱하면

$$\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{\Pi}^H \mathbf{x}'(t) = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{x}(t)] \\ \text{Im}[\mathbf{x}(t)] \end{bmatrix} \quad (32)$$

와 같고  $\mathbf{x}'(t)$ 는 실수벡터  $\mathbf{y}(t)$ 로 변환된다<sup>[11]</sup>.  $\mathbf{y}(t)$ 에 대한 샘플행렬은

$$\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^T(n) \quad (33)$$

과 같이 주어지고,  $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 는 실수행렬  $\hat{\mathbf{R}}_y$ 로부터

$$\hat{\mathbf{R}}_{x'} = \mathbf{\Pi} \hat{\mathbf{R}}_y \mathbf{\Pi}^H \quad (34)$$

와 같이 계산할 수 있다.

3.1 절에 설명한 바와 같이  $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 을 수정하여  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 을 얻는다. 식 (25)의 구조를 갖는 행렬  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 은 다음처럼 유니터리 행렬  $\mathbf{\Pi}$ 를 이용하여 실수행렬  $\bar{\mathbf{R}}_y$ 로 변환된다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_y &= \mathbf{\Pi}^H \bar{\mathbf{R}}_{x'} \mathbf{\Pi} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Re}(\bar{\mathbf{R}}_{x'} + \bar{\mathbf{C}}_x) & \text{Im}(\bar{\mathbf{R}}_{x'} + \bar{\mathbf{C}}_x) \\ \text{Im}(\bar{\mathbf{R}}_{x'} + \bar{\mathbf{C}}_x) & \text{Re}(\bar{\mathbf{R}}_{x'} - \bar{\mathbf{C}}_x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

실수행렬  $\bar{\mathbf{R}}_y$ 를 고유분해하여

$$\bar{\mathbf{R}}_y = \bar{\mathbf{E}}_y \bar{\mathbf{\Lambda}}_y \bar{\mathbf{E}}_y^T = \bar{\mathbf{E}}_{ys} \bar{\mathbf{\Lambda}}_{ys} \bar{\mathbf{E}}_{ys}^T + \bar{\mathbf{E}}_{yn} \bar{\mathbf{\Lambda}}_{yn} \bar{\mathbf{E}}_{yn}^T \quad (36)$$

와 같이 주어지고, Hermitian 행렬  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 고유분해는

$$\bar{\mathbf{R}}_{x'} = \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{\Lambda}} \bar{\mathbf{E}}^H = \bar{\mathbf{E}}_s \bar{\mathbf{\Lambda}}_s \bar{\mathbf{E}}_s^H + \bar{\mathbf{E}}_n \bar{\mathbf{\Lambda}}_n \bar{\mathbf{E}}_n^H \quad (37)$$

와 같이 표현할 수 있다. 식 (37)에서 각 행렬은 (15)에서 대응하는 행렬의 추정이다. 예를 들어,  $\bar{\mathbf{\Lambda}}, \bar{\mathbf{E}}_s$ 는  $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{E}_s$ 의 추정이다. 식 (35)에 따라  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 고유치, 고유벡터는

$$\bar{\mathbf{\Lambda}} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_y \quad (38)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{\Pi} \bar{\mathbf{E}}_y \quad (39)$$

와 같이 주어진다.

### 3.3 기증벡터 계산

식 (39)에 의거해서  $\bar{\mathbf{R}}_y$ 의 고유벡터로부터  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 신호 고유벡터  $\bar{\mathbf{E}}_s$ 를 얻으면, 이를 이용하여 원하는 신호에 대한 확장조항벡터를 구한다. 확장조항벡터를 구하기 위해서는 원하는 신호의 도래각과 비회전 계수가 필요하고,  $\mathbf{E}_n^H \mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ 의 직교성에 근거한 NC-MUSIC (noncircular multiple signal classification)<sup>[11,15]</sup>에 기초하여 이들에 대한 추정  $\hat{\theta}_0, \hat{\gamma}_0$ 을 구할 수 있다. 원하는

신호에 대한 도래각 영역  $\Theta_d$ 는  $\theta_0$ 의 초기 추정값이  $\theta_{00}$ 이면  $\Theta_d = [\theta_{00} - \Delta\theta, \theta_{00} + \Delta\theta]$ 와 같이 설정할 수 있다.  $\Delta\theta$ 는 사전에 정한 상수이다.

추정 확장조향벡터  $\hat{\mathbf{a}}_0$ 을 구하면, 식 (16), (38)에 따라 가중벡터를

$$\mathbf{w} = \mu \bar{\mathbf{E}}_s \bar{\mathbf{A}}_s^{-1} \bar{\mathbf{E}}_s^H \hat{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{\Pi} \mathbf{w}_y \quad (40)$$

$$\mathbf{w}_y = \mu_y \bar{\mathbf{E}}_{ys} \bar{\mathbf{A}}_{ys}^{-1} \bar{\mathbf{E}}_{ys}^H \hat{\mathbf{a}}_{y0} \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{y0} = \mathbf{\Pi}^H \hat{\mathbf{a}}_0 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \text{Re} [\mathbf{a}(\hat{\theta}_0)] \\ \text{Im} [\mathbf{a}(\hat{\theta}_0)] \end{bmatrix} \quad (42)$$

와 같이 계산한다. 실수상수  $\mu_y$ 는  $\mathbf{w}_y^H \hat{\mathbf{a}}_{y0} = 1$ 의 제한조건에 따라 계산할 수 있다. 빔포밍을 통해 구하고자 하는 신호는 어레이 출력이다. 제안방식에서, 식 (40)에서 보듯이 가중벡터는 복소켈레 대칭이고, 식 (12)의 출력 신호는  $z(t) = \mathbf{w}_y^H \mathbf{y}(t)$ 와 같이 실수신호로 주어진다.

$N$ 이 무한대이면 수직샘플행렬  $\bar{\mathbf{R}}_x$ 은  $\mathbf{R}_x$ 과 동일하게 되고, 정확하게 고유치 고유벡터를 얻는다. 이때,  $\theta_0 \in \Theta_d$ 이면 NC-MUSIC은 정확하게 도래각을 추정하고,  $\hat{\mathbf{a}}_0$ 은  $\mathbf{a}_0$ 와 동일하게 된다. 식 (40)의 가중벡터는 최적벡터와 같고 제안방식은 최적 SINR을 나타낸다.

#### IV. 시뮬레이션

반파장 간격으로 구성된 ULA 어레이에 4개의 BPSK 신호가 도래한다. 센서의 수에 따른 성능을 나타내는 그림 7을 제외한 다른 시뮬레이션에서는 12개의 센서를 사용하였다. 원하는 신호와 간섭신호의 도래각은  $\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = -20^\circ, \theta_2 = 15^\circ, \theta_3 = 30^\circ$ 이다. 간섭신호의 전력은 서로 같고, INR(interference-to-noise ratio)은 10dB이다. 빔포머 성능은 SINR로 측정하며, 평균 SINR은 100번의 모의실험을 통해 구하였다.

제안방식의 성능을 CSM(conjugate symmetry method)<sup>[11]</sup>, INP(interference null space projection)<sup>[12]</sup>, MUS(multiple uncertainty sets)<sup>[5]</sup>, DLM(diagonal loading method)<sup>[6]</sup>의 WL 방식과 비교한다. 원하는 신호의 도래각 영역  $\Theta_d$ 를 규정하는 상수  $\Delta\theta_0 = 5^\circ$ 이고,  $\theta_0$ 을 추정하고 간섭 널 공간을 구하는 INP 방식도 같은  $\Theta_d$ 를 사용한다. 조향오류에 대한 강인성을 갖기 위해 SDP(semidefinite programing) 비선형 문제의 해를 구

하고 반복계산을 하는 MUS에서 여러 파라미터 설정을 해야 하는 데, 제한점의 개수는 3개이고  $2^\circ$  간격으로 설정해서 제한점은  $(\theta_{00} - 2^\circ), \theta_{00}, (\theta_{00} + 2^\circ)$ 이다. 각 제한점에서 불확실 집합의 크기(참고문헌 [5]에서  $\tilde{\epsilon}_k$ 로 표기)는 0.7이다. 확장샘플행렬에 대각로딩을 하고 이의 역행렬을 구해 가중벡터를 계산하는 DLM에서  $10\hat{\sigma}^2$ 의 대각로딩 값을 사용하였다. CSM 방식은 원하는 신호와 간섭신호의 도래각, 전력을 추정하고 간섭잡음행렬을 구성하여 가중벡터를 계산한다.

그림 1, 2는 스냅샷의 개수  $N$ 이 무한개여서  $\mathbf{R}_x$ 가 가용한 정상상태(steady state)에서, 포인팅 오류  $\theta_e (= \theta_{00} - \theta_0)$ 에 대한 성능을 나타낸다. 그림 1, 2에서 SNR(signal-to-noise ratio)은 각각 0dB, 5dB이다. 그림 1, 2 모두에서 포인팅 오류에 관계없이 제안방식, CSM, INP는  $\theta_0, \gamma_0$ 을 정확하게 구해, 제안방식은 최적 빔포머와 똑같은 성능을 보이고, 다른 방식도 실질적으로 이와 같은 성능을 나타낸다. 오류가 없으면, 즉  $\theta_e = 0$ 이면, DLM은 최적 SINR과 거의 동일하고 MUS는 최적 SINR보다 약간 작은 값을 가진다. 그러나 이들 방식은 오류에 의해 성능저하가 발생하고 원하는 신호의 전력이 클수록 성능저하가 커짐을 나타낸다. 특히 MUS의 경우  $|\theta_e| > 2^\circ$  이면 SINR이 급격하게 감소한다.

그림 3, 4에서는 포인팅 오류가 없을 때, 즉  $\theta_e = 0$ 일 때, 각각 SNR이 0dB, 5dB일 때  $N$ 에 따른 평균 SINR을 예시한다. 각 방식 모두  $N$ 이 증가함에 따라 SINR이 증가하면서 그림 1, 2에 보인 해당 정상상태 SINR에 접근한다. 제안방식의 수렴속도는 매우 빨라, 간섭잡음

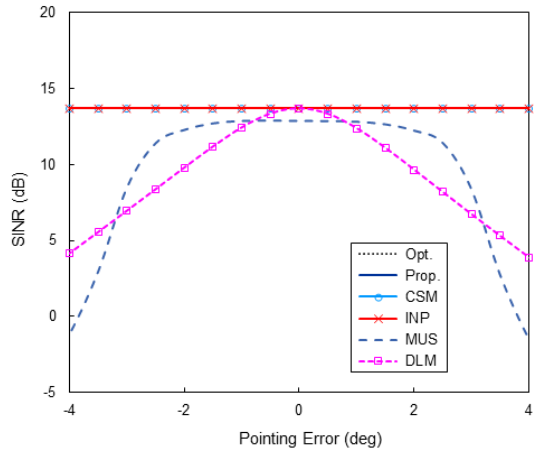


그림 1. SNR=0dB일 때, 포인팅 오류에 대한 정상상태에서 SINR  
Fig. 1. SINRs versus  $\theta_e$  when SNR=0dB

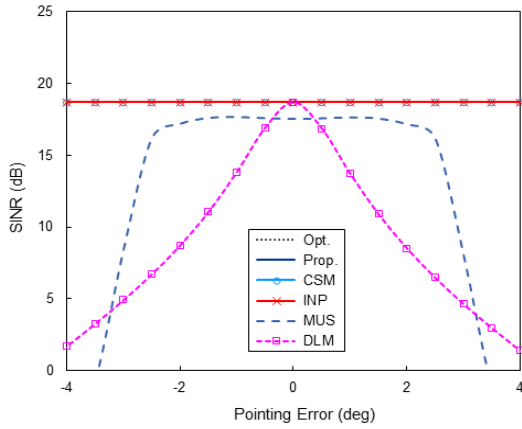


그림 2. SNR=5dB일 때, 포인팅 오류에 대한 정상상태에서 SINR  
 Fig. 2. SINRs versus  $\theta_e$  when SNR=5dB

행렬을 구함에 따라 계산이 매우 복잡한 CSM과 거의 같은 성능을 보인다.  $N=50$ 일 때, 그림 3, 4에서 제안 방식은 최적성능과 비교하여 각각 0.5dB, 0.3dB 차이를 보인다. 반면에 간섭잡음행렬을 구성하지 않는 기존 방식 중 가장 좋은 성능을 나타내는 INP는 각각 2.5, 5.0dB의 차이를 가진다.

$\theta_e = -2^\circ$ 일 때, 그림 5, 6은 각각 SNR이 0dB, 5dB일 때  $N$ 에 따른 성능을 나타낸다. 그림 5, 6을 그림 3, 4와 비교하면, 그림 1, 2에서처럼 제안방식, CSM, INP는 오류에 따른 성능저하가 거의 없고, MUS도 작은 성능 차이를 보인다. 반면에 DLM의 경우 오류에 의해 큰 성능저하를 보여.  $N=300$ 일 때, 그림 5, 6에서의 SINR이 그림 3, 4보다 각각 3.7dB, 8.7dB 작은 값을 가진다.

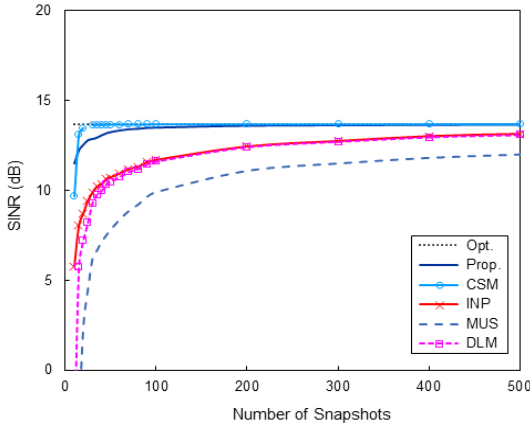


그림 3. SNR=0dB,  $\theta_e = 0$ 일 때,  $N$ 에 따른 SINR  
 Fig. 3. SINRs versus  $N$  when SNR=0dB and  $\theta_e = 0$

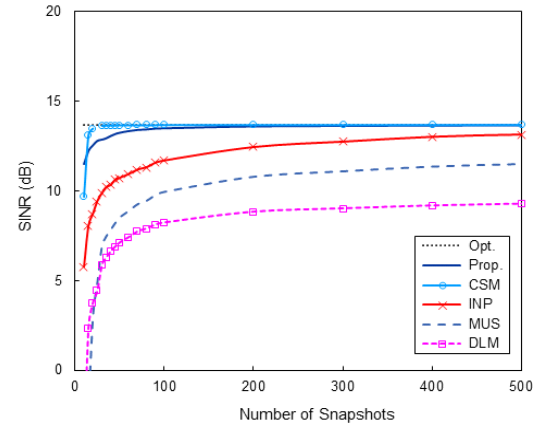


그림 5. SNR=0dB,  $\theta_e = -2^\circ$ 일 때,  $N$ 에 따른 SINR  
 Fig. 5. SINRs versus  $N$  when SNR=0dB and  $\theta_e = -2^\circ$

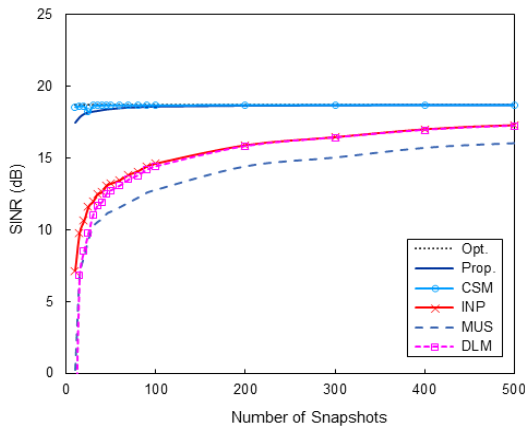


그림 4. SNR=5dB,  $\theta_e = 0$ 일 때,  $N$ 에 따른 SINR  
 Fig. 4. SINRs versus  $N$  when SNR=5dB and  $\theta_e = 0^\circ$

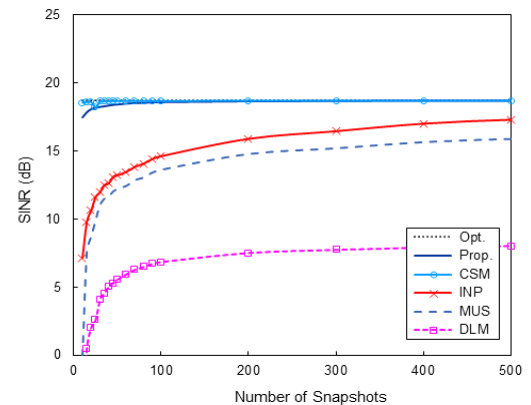


그림 6. SNR=5dB,  $\theta_e = -2^\circ$ 일 때,  $N$ 에 따른 SINR  
 Fig. 6. SINRs versus  $N$  when SNR=5dB and  $\theta_e = -2^\circ$

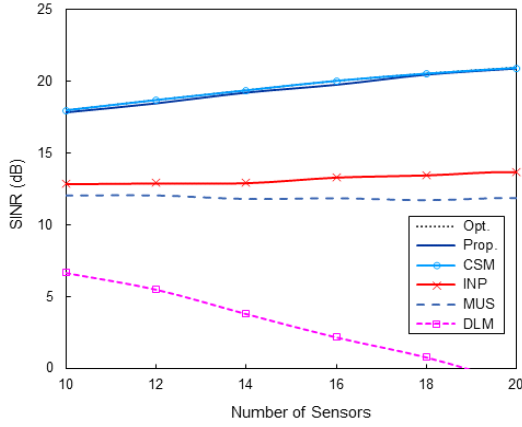


그림 7.  $N=50$ ,  $\text{SNR}=5\text{dB}$ ,  $\theta_e = -2^\circ$ 일 때,  $M$ 에 따른 SINR

Fig. 7. SINRs versus  $M$  when  $N=50$ ,  $\text{SNR}=5\text{dB}$ , and  $\theta_e = -2^\circ$

그림 7은  $N=50$ 일 때 센서의 수  $M$ 에 따른 성능을 보여준다.  $\theta_e = -2^\circ$ ,  $\text{SNR}$ 은  $5\text{dB}$ 이다. 제안방식, CSM은  $M$ 이 증가함에 따라 SINR이 증가한다. 반면에 DLM인 경우,  $M$ 이 증가함에 따라 빔포머가 오류에 민감해져 오히려 SINR이 감소한다. 최적 빔포머와 제안 방식 간 성능 차이는  $0.3\text{dB}$  보다 작고, 어레이 크기가 커져도 빠르게 수렴하면서 잘 동작함을 보인다.

### V. 결론

도래하는 신호가 서로 상관되어 있지 않으면  $\mathbf{R}_x$ 에서 대각요소들,  $\mathbf{C}_x$ 에서 반대각 요소들은 서로 같다. 제안한 빔포밍 방식에서는 이의 성질에 따라 샘플행렬  $\hat{\mathbf{R}}_x$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_x$ 로부터 수정행렬  $\bar{\mathbf{R}}_x$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_x$ 를 구하고 식 (25)와 같이 확장행렬  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 을 구성한다. 식 (30)에 보인 바와 같이,  $l_1$ -norm 견지에서  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 에서의 오류는  $\hat{\mathbf{R}}_x$ 보다 작다. 또한 식 (35)에서 보듯이,  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 는 유니타리 행렬  $\mathbf{\Pi}$ 를 이용하여 실수행렬  $\bar{\mathbf{R}}_y$ 로 변화된다. 실수행렬  $\bar{\mathbf{R}}_y$ 를 고유분해하여 식 (38), (39)에 따라  $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 고유치, 고유 벡터를 얻는다. 이들을 이용하여  $\hat{\theta}_0$ ,  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_0$ 을 구한 후, 신호부공간에서 (40)과 같이 가중벡터를 계산한다. 제안방식의 계산량은 간섭신호의 도래각과 전력을 추정하여 간섭잡음행렬을 구함에 따라 계산이 복잡한 CSM 방식보다 매우 작다. 제안방식의 계산량은 매우 작지만, 시뮬레이션 결과에 따르면, 매우 빠르게 수렴하며 CSM 방식과 유사한 성능을 나타낸다.

### References

- [1] J. Li and P. Stoica, *Robust Adaptive Beamforming*, Hoboken, NJ: Wiley, 2005.
- [2] Z. Li, R. Pu, Y. Xia, W. Pei, and D. P. Mandic, "A full second-order analysis of the widely linear MVDR beamformer for noncircular signals," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 69, pp. 4257-4268, 2021.
- [3] W. Xia, Y. Zhang, and H. Yu, "Widely linear null broadening GNSS anti-interference for polarization sensitive arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 59, no. 6, pp. 1-11, Dec. 2023.
- [4] J. Zhang, L. Huang, L. Zhang, B. Zhang, and Z. Ye, "Robust widely linear beamformer based on a projection constraint," in *Proc. IEEE ICASSP*, pp. 2509-2513, Apr. 2015.
- [5] J. Yang and G. Liang, "Robust widely linear beamforming with multiple uncertainty sets," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 42851-42859, 2022.
- [6] D. Xu, L. Huang, X. Xu, and Z. Ye, "Widely linear MVDR beamformers for noncircular signals based on time-averaged second-order noncircularity coefficient estimation," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 62, no. 7, pp. 3219-3227, Sep. 2013.
- [7] Z. Meng, S. Dong, Z. Shi, and X. Wang, "Robust beamforming for noncircular signals in uniform linear arrays with unknown mutual coupling," *Digital Signal Process.*, vol. 122, p. 103378, Apr. 2022.
- [8] D. Xu, C. Gong, S. Cao, X. Xu, and Z. Ye, "Robust widely linear beamforming based on spatial spectrum of noncircularity coefficient," *Signal Process.*, vol. 104, no. 11, pp. 167-173, Nov. 2014.
- [9] Z. Meng, W. Zhou, and S. Gazor, "Robust widely linear beamforming using estimation of extended covariance matrix and steering vector," *EURASIP J. Wireless Commun. and Net.*, vol. 2020, pp. 1-20, Oct. 2020.
- [10] J. Liu, W. Xie, Q. Wan, and G. Gui, "Robust widely linear beamforming via the techniques of iterative QCQP and shrinkage for steering

vector estimation,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 17143-17152, 2018.

최 양 호 (Yang-Ho Choi)

제47권 5호, 2022년 5월호 참조

- [11] Y.-H. Choi, “WL-MVDR based effective beamforming for noncircular signals using conjugate symmetry,” *J. KICS*, vol. 47, no. 5, pp. 721-730, May 2022.
- [12] Y.-H. Choi, “Efficient WL beamforming with projection onto interference null space,” *J. KICS*, vol. 50, no. 5, pp. 764-772, May 2025.
- [13] B. Picinbono, “Second-order complex random vectors and normal distributions,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 10, pp. 2637-2640, Oct. 1996.
- [14] R. O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [15] Y.-H. Choi, “Estimation for arrival angles of noncircular signals based on Toeplitz covariance,” *J. KICS*, vol. 49, no. 1, pp. 64-69, Jan. 2024.
- [16] Y.-H. Choi, “Simple subspace based adaptive beamforming under Toeplitz covariances,” *EURASIP J. Adv. Sig. Process.*, vol. 2024, no. 61, Dec. 2024.