

Toeplitz 공분산에 기반한 비회전 신호의 도래각 추정

최 양 호*

Estimation for Arrival Angles of Noncircular Signals Based on Toeplitz Covariance

Yang-Ho Choi*

요 약

센서 어레이에 도래하는 신호가 비회전인 경우 확장 수신벡터를 이용한다. 확장 수신벡터에 대한 확장 공분산 행렬은 정규 공분산행렬과 관계행렬로 구성된다. ULA(uniform linear array)에 도래하는 신호가 서로 상관되어 있지 않으면 정규 공분산행렬은 Toeplitz 형태로 대각요소들은 서로 같고 관계행렬의 반대각 요소들도 서로 같게 된다. 종래 방식에서 이용하는 확장 샘플행렬을 이의 성질에 따라 수정하여 도래각을 추정하는 방식을 제안한다. 시뮬레이션 결과에 따르면 제안방식은 SNR(signal-to-noise ratio)이 작거나 샘플의 개수가 작을 때 종래방식에 비해 큰 성능개선을 나타낸다.

Key Words : Direction estimation, Toeplitz, Noncircular signals, MUSIC, Rectified matrix

ABSTRACT

When the signals arriving at a sensor array are noncircular an extended received vector is utilized. The extended covariance matrix consists of the normal covariance matrix and the relation matrix. In case the signals incident into a ULA (uniform linear array) are uncorrelated with each other the entries along each diagonal of the normal matrix, which is of Toeplitz form, are equal and the entries along each antidiagonal of the relation matrix are also equal. This paper proposes a direction estimation method through the rectification according to these properties, instead of the extended sample matrix used by conventional methods. Simulation results show significant performance improvement of the proposed method when SNR (signal-to-noise ratio) is low or when the number of samples is small.

1. 서 론

센서 어레이에 비회전 신호가 입사하면 비회전성을 반영하여 도래각 추정성능을 좋게 할 수 있다¹⁻³. 이를 위해서 확장 수신벡터를 이용한다. 확장 수신벡터는 수신벡터에 이의 켈레벡터를 연결하여 구성하고, 켈레벡터는 가상 어레이로부터 수신된 신호로 볼 수 있다. MIMO(mutl-input mutl-output)에서도 OFDM

(orthogonal frequency division multiplexing) 등 특정 형태의 신호에 대해 가상 어레이를 도입하여 도래각 추정 성능의 개선을 기하고 있다^{4,5}. 확장 벡터에 대한 확장 공분산행렬은 정규 공분산행렬과 관계행렬 (relation matrix)⁶로 구성된다. ULA(uniform linear array)에서 이들 비회전 신호가 서로 상관되어 있지 않다면 공분산행렬은 Toeplitz 형태⁷⁻⁹로 주어져서 행렬의 각기 대각(diagonal)을 따라 놓여 있는 대각요소

* First Author : Kangwon National University, Dept. of Electrical and Electronic Engineering (yhochoi@kangwon.ac.kr), 종신회원
 논문번호 : 202306-131-RN, Received June 22, 2023; Revised August 31, 2023; Accepted September 6, 2023

들은 서로 같은 값을 가진다.

본 논문에서는 이의 성질을 이용하여 도래각 추정 성능을 개선할 수 있는 방법을 제안한다. 정규 공분산 행렬의 각 대각요소들이 동일한 값을 가짐에 따라 샘플행렬(sample matrix)에서 이들 위치에 있는 요소들을 합한 평균으로 요소의 값을 동일하게 수정한다. 또한 관계행렬에서도 반대각(anti-diagonal) 위치에 놓여 있는 요소들은 동일하며 유사하게 수정한다. 이와 같이 수정된 확장 샘플행렬을 구성하고 고유분해하여 MUSIC(multiple signal classification)^[10] 원리에 기초하여 도래각을 추정한다. 시뮬레이션은 수정확장 샘플행렬을 이용하는 제안방식이 확장 샘플행렬을 이용하는 기존방식보다 우수한 성능을 가짐을 보여준다.

윗 첨자 *, T , H 는 각각 복소켈레(complex conjugate), 행렬의 전치(transpose), 켈레전치(complex conjugate transpose)를 말한다. E 는 기댓값, Re 는 복소수의 실수부를 의미한다. 벡터, 행렬은 굵은 체를 사용하며, 단위행렬을 \mathbf{I} 로 나타낸다.

II. 데이터 모델링

M 개의 센서로 구성된 ULA 어레이에 K 개의 신호가 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_K\}$ 로부터 도래한다. 도래각 θ 에 대한 조향벡터를 $\mathbf{a}(\theta)$ 로 나타낸다. 이때, 도래신호에 대한 조향벡터 행렬은

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (1)$$

와 같이 나타내진다. 어레이에 수신된 신호는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

여기서 $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_K(t)]^T$, $s_k(t)$ 는 k 번째 신호의 복소 포락선, $\mathbf{n}(t)$ 는 잡음벡터이다. 잡음은 가우시안 랜덤 프로세스로 평균은 0, 분산은 σ^2 이고, 공분산행렬은 $E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma^2\mathbf{I}$ 와 같다. $\mathbf{x}(t)$ 에 대한 공분산행렬은

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (3)$$

와 같이 주어지고, $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ 이다. 이들 신호는 서로 상관돼 있지 않아 \mathbf{R}_s 는 대각행렬이고 \mathbf{R}_x

는 Toeplitz 행렬로 주어진다.

도래하는 신호는 엄격한 비회전 신호로 초기 위상은 $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \dots, \phi_K]$ 이다. 이때 k 번째 신호의 복소 포락선은 $s_k(t) = e^{j\phi_k}\gamma_k(t)$ 와 같이 쓸 수 있고 $\gamma_k(t)$ 는 실수 신호이다. 이들 실수 신호에 대한 벡터를 $\boldsymbol{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \dots, \gamma_K(t)]^T$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 에 대한 공분산행렬을 \mathbf{R}_γ 로 나타낸다. \mathbf{R}_γ 는 \mathbf{R}_s 와 같고 아래처럼 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_\gamma = \text{diag}[p_1, \dots, p_K] \quad (4)$$

p_k 는 k 번째 신호의 전력이다. $\mathbf{s}(t)$ 의 각 요소는 비회전이어서 $\mathbf{C}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^T(t)]$ 은 영(zero) 행렬이 아니며, 관계행렬은

$$\mathbf{C}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}_s\mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}) \quad (5)$$

와 같이 주어진다.

III. 도래각 추정

비회전 신호의 도래각 추정에서는 확장 수신벡터를 이용한다. 수신벡터 $\mathbf{x}(t)$ 에 이의 켈레복소를 연결하여 확장 수신벡터 $\mathbf{x}'(t)$ 를 구성한다.

$$\mathbf{x}'(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^H(t)]^T \quad (6)$$

$\mathbf{x}'(t)$ 에 대한 공분산 행렬은

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x'} &= \mathbf{A}'(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_\gamma\mathbf{A}'^H(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{C}_x \\ \mathbf{C}_x^* & \mathbf{R}_x^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

와 같이 나타낼 수 있고,

$$\mathbf{A}'(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}'(\phi_1, \theta_1), \dots, \mathbf{a}'(\phi_K, \theta_K)] \quad (8)$$

$$\mathbf{a}'(\phi, \theta) = [e^{j\phi}\mathbf{a}^T(\theta), e^{-j\phi}\mathbf{a}^H(\theta)]^T \quad (9)$$

이다. 확장 공분산행렬 $\mathbf{R}_{x'}$ 를 고유분해하여 신호공간과 잡음공간으로 분리할 수 있고, 확장 조향벡터 $\mathbf{a}'(\phi_k, \theta_k)$ ($k = 1, \dots, K$)는 잡음공간에 직교한다.

실제의 경우, 정규 공분산행렬 \mathbf{R}_x , 관계행렬 \mathbf{C}_x 를

데이터 샘플로부터 추정해야 한다. N 개의 샘플이 있다면 \mathbf{R}_x , \mathbf{C}_x 는

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) \quad (11)$$

과 같이 추정할 수 있다. 이들로부터 공분산 행렬 $\mathbf{R}_{x'}$ 를 추정할 확장 샘플행렬 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 를 (7)에 의거하여 구할 수 있다. 종래의 방식^[1-3]에서는 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 고유분해를 이용하여 도래각을 추정하나, Topleft 행렬인 \mathbf{R}_x 의 성질을 이용하여 추정성능을 향상할 수 있다.

\mathbf{R}_x 에서 각각의 대각을 따라 놓여 있는 요소들은 서로 같다. 즉,

$$r_{1l} = r_{2(l+1)} = \dots = r_{(M-l+1)M} \quad (12)$$

여기서 r_{ij} 는 \mathbf{R}_x 의 (i,j) 요소이고, Hermitian 행렬로 $r_{ij} = r_{ji}^*$ 이다. 윗 식에서 $l=1$ 이면 주대각요소를, $2 \leq l \leq M$ 이면 부대각요소를 나타낸다. 제안방식에서는 (12)의 관계에 근거하여 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 로부터 수정행렬 $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 를 구한다.

$$\bar{r}_{1l} = \frac{1}{M-l+1} \sum_{i=1}^{M-l+1} \hat{r}_{i(i+l-1)} \quad (13)$$

$$\bar{r}_{1l} = \bar{r}_{2(l+1)} = \dots = \bar{r}_{(M-l+1)M} \quad (14)$$

$$\bar{r}_{lk} = \bar{r}_{kl}^*, \quad k < l \quad (15)$$

여기서 \bar{r}_{ij} , \hat{r}_{ij} 은 각각 $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$, $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 (i,j) 요소이다. 관계행렬 \mathbf{C}_x 에서는 반대각요소는 같고 이에 따라 $\hat{\mathbf{C}}_x$ 로부터 수정행렬 $\bar{\mathbf{C}}_x$ 를 구한다. $\bar{\mathbf{C}}_x$, $\hat{\mathbf{C}}_x$ 의 (i,j) 요소는 각각 \bar{c}_{ij} , \hat{c}_{ij} 이다. $l \leq M-k+1$ 인 경우, \bar{c}_{kl} 은 아래 식과 같이 계산된다.

$$\bar{c}_{kl} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{c}_{(k-i+1)i} \quad (16)$$

$$\bar{c}_{kl} = \bar{c}_{(k-1)2} = \dots = \bar{c}_{1k} \quad (17)$$

유사하게 $l > M-k+1$ 일 때 $\bar{\mathbf{C}}_x$ 의 반대각 요소가 같도록 \bar{c}_{kl} 를 계산할 수 있다.

$\bar{\mathbf{R}}_{x'}$, $\bar{\mathbf{C}}_x$ 를 구하면 수정 샘플행렬 $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 을

$$\bar{\mathbf{R}}_{x'} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_x & \bar{\mathbf{C}}_x \\ \bar{\mathbf{C}}_x^* & \bar{\mathbf{R}}_x^* \end{bmatrix} \quad (18)$$

와 같이 구성한다. $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 를 고유분해하여

$$\bar{\mathbf{R}}_{x'} = \sum_{m=1}^M \bar{\lambda}_m \bar{\mathbf{e}}_m = \bar{\mathbf{E}}_s \bar{\mathbf{A}}_s \bar{\mathbf{E}}_s^H + \bar{\mathbf{E}}_n \bar{\mathbf{A}}_n \bar{\mathbf{E}}_n^H \quad (19)$$

와 같이 나타낼 수 있다. $\bar{\lambda}_m$, $\bar{\mathbf{e}}_m$ 은 고유치, 고유벡터 쌍으로 고유치는 내림차순으로 배열되어 있고, $\bar{\mathbf{A}}_s$ 은 처음 K 개의 고유치로 구성되는 대각행렬이고 $\bar{\mathbf{E}}_s$ 는 대응하는 고유벡터 행렬이다. $\bar{\mathbf{A}}_n$ 은 나머지 고유치로 구성되고, $\bar{\mathbf{E}}_n$ 은 고유벡터 행렬이다.

N 이 무한대로 접근하면 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$, $\bar{\mathbf{R}}_{x'}$ 는 $\mathbf{R}_{x'}$ 로, $\hat{\mathbf{C}}_x$, $\bar{\mathbf{C}}_x$ 는 \mathbf{C}_x 로 접근하고, 이때 $\bar{\mathbf{E}}_n$ 은 $\mathbf{a}'(\phi, \theta_k)$ ($k=1, \dots, K$)와 직교한다; 도래각 추정을 위해 직교성에 근거하여 아래 (20)에 주어진 $f(\phi, \theta)$ 의 극소치를 탐색한다.

$$f(\phi, \theta) = \mathbf{a}'^H(\phi, \theta) \bar{\mathbf{E}}_n \bar{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{a}'(\phi, \theta) \quad (20)$$

식 (9)를 이용하여 $f(\phi, \theta)$ 를

$$f(\phi, \theta) = g(\theta) + 2\text{Re}(e^{-j2\phi} \mathbf{a}^H(\theta) \bar{\mathbf{E}}_{n1} \bar{\mathbf{E}}_{n2}^H \mathbf{a}^*(\theta)) \quad (21)$$

와 같이 나타낼 수 있다. $g(\theta)$ 는

$$g(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \bar{\mathbf{E}}_{n1} \bar{\mathbf{E}}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}^H(\theta) \bar{\mathbf{E}}_{n2} \bar{\mathbf{E}}_{n2}^H \mathbf{a}(\theta) \quad (22)$$

이고, $\bar{\mathbf{E}}_{n1}$, $\bar{\mathbf{E}}_{n2}$ 는 각각 $\bar{\mathbf{E}}_n$ 의 처음 M 행, 나머지 M 행으로 구성되는 행렬이다. ϕ 에 대해 $f(\phi, \theta)$ 를 최소화하면

$$f(\theta) = g(\theta) - 2|\mathbf{a}^H(\theta) \bar{\mathbf{E}}_{n1} \bar{\mathbf{E}}_{n2}^H \mathbf{a}^*(\theta)| \quad (23)$$

와 같이 구해진다. 도래각은 $f(\theta)$ 의 극소치를 탐색하여 추정한다. 탐색된 극소치의 개수가 K 개를 초과하면 작은 순으로 K 개의 극소치를 선정하여 도래각을 구한다.

참고문헌 [3]의 기존방식에서는 샘플행렬 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 을 실수행렬로 변환하여 고유분해 할 수 있어 복소수 행렬 $\overline{\mathbf{R}}_{x'}$ 를 고유분해하는 제안방식보다 계산이 간편하다. 그러나, 다음 시뮬레이션 결과에서 볼 수 있듯이 Toeplitz 성질을 반영한 제안방식은 기존방식보다 우수한 추정성능을 나타낸다.

IV. 시뮬레이션

3개의 BPSK 신호가 반과장 간격으로 놓인 5개의 센서로 구성된 ULA에 $\theta_1 = -10^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = 20^\circ$ 로부터 입사한다. 각 신호의 SNR은 동일하다. 제안방식의 RMSE(root mean square error) 성능을 샘플행렬 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 를 그대로 이용하는 참고문헌 [3]에서의 NC-MUSIC(noncircular MUSIC)과 비교한다. 평균을 구하기 위해 200번의 모의실험을 반복하였다. RMSE는

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{LK} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{k,l} - \theta_k)^2}$$

와 같이 계산되며, $K=3$, $L=200$, $\hat{\theta}_{k,l}$ 은 l 번째 모의실험에서 θ_k 에 대한 추정이다. 비교를 위해 CRB(Cramér-Rao bound)^[11]를 포함하였고, 알려진 비회전성을 반영한 NC-CRB^[3]도 함께 제시하였다.

그림 1에서는 $N=20$ 인 경우에 SNR에 따른 결과를 보여준다. 그림 1(a)는 샘플행렬 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$, 수정행렬 $\overline{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 평균오차를 나타낸다. 제곱오차는 $\|\mathbf{V} - \mathbf{R}_{x'}\|^2 / \|\mathbf{R}_{x'}\|^2$ 와 같이 계산되고, $\|\cdot\|$ 는 Frobenius norm이다. \mathbf{V} 는 각 시행에서의 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$, 또는 $\overline{\mathbf{R}}_{x'}$ 를 나타내고 200번의 시행을 통해 이들 값의 평균을 구하고 제곱근을 취해 오차를 구한다. 그림 1(a)를 보면, 예상한 대로, SNR이 증가함에 따라 오차가 작아지고, $\overline{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 오차가 $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 의 오차보다 작음을 보인다. 그림 1(b)는 RMSE 성능을 나타낸다. CRB들은 SNR이 증가함에 따라 선형적으로 감소하고, 비회전성을 반영한 NC-CRB가 그렇지 않은 CRB보다 작은 값을 가진다. 제안방식에서는 SNR이 0dB 이상에서

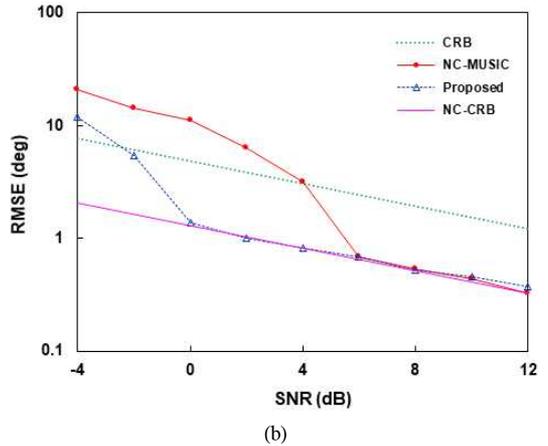
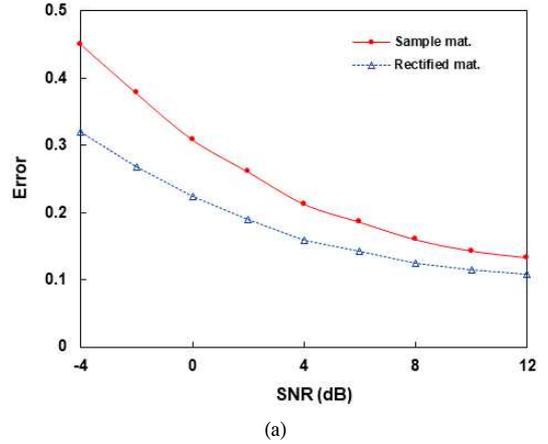


그림 1. $N = 20$ 일 때, SNR에 따른 성능 비교 (a) $\overline{\mathbf{R}}_{x'}$, $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$ 에서의 평균오차 (b) RMSE 비교
Fig. 1. Performance comparison against SNR when $N = 20$ (a) Average errors in $\overline{\mathbf{R}}_{x'}$ and $\hat{\mathbf{R}}_{x'}$. (b) Comparison of RMSEs

NC-CRB에 매우 가까운 성능을 보이거나 기존방식은 SNR이 6dB 이상에서 그러하다.

그림 2는 $N=50$ 인 경우이다. 제시하지 않았지만, 이 경우, 행렬 오차는 동일한 SNR에서 그림 1(a)보다 작으나 그 경향은 그림 1(a)와 유사하다. RMSE는 그림 1(b)와 비교하여 N 이 증가하여 작은 값을 나타낸다. 유한 번의 모의실험으로 RMSE 값이 NC-CRB 보다 조금 작은 값을 보이기도 한다. 제안방식에서는 SNR이 -2dB 이상에서, 기존방식은 0dB 이상에서 NC-CRB와 거의 같은 성능을 나타낸다.

그림 1, 2에 따르면 제안방식은 SNR이나 N 이 작아 기존방식에서 큰 추정오차를 가질 때 좋은 성능개선을 기할 수 있음을 보여준다.

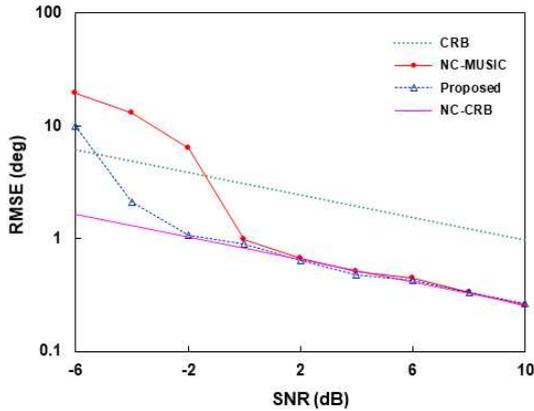


그림 2. $N = 50$ 일 때, SNR에 따른 RMSE 비교
 Fig. 2. Comparison of RMSEs against SNR when $N = 50$

V. 결론

상관되지 않은 비회전 신호가 ULA 어레이에 도래할 때 \mathbf{R}_x 에서 (12)와 같이 동일한 대각에 놓인 요소들은 서로 같고, 관계행렬 \mathbf{C}_x 에서는 반대각요소들이 같다. 확장 샘플행렬 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 로부터 이의 성질을 (13)-(17)과 같이 반영하여 수정행렬 $\bar{\mathbf{R}}_x$ 을 (18)과 같이 구한다. 이를 고유분해하고 $f(\theta)$ 를 계산하여 극소치를 탐색해 도래각을 추정한다. 시뮬레이션 결과는 $\bar{\mathbf{R}}_x$ 의 오차가 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 의 오차보다 작고 제안방식의 도래각 추정성능이 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 의 고유분해를 이용하는 기존방식보다 우수함을 보여준다. SNR이나 샘플의 수가 작아 기존방식에서 큰 추정오차를 가질 때 제안방식은 좋은 성능개선을 보일 수 있다.

References

[1] F. Gao, A. Nallanathan, and Y. Wang, "Improved MUSIC under the coexistence of both circular and noncircular sources," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 7, pp. 3033-3038, Jul. 2008. (<https://doi.org/10.1109/TSP.2007.916123>)

[2] Z. Li, X. Zhang, and J. Shen, "2D-DOA estimation of strictly noncircular sources utilizing connection-matrix for L-shaped array," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 10, no. 2, pp. 296-300, Feb. 2021. (<https://doi.org/10.1109/LWC.2020.3029457>)

[3] Y.-H. Choi, "Simple direction finding of noncircular signals using the centro-Hermitian property," *Digital Signal Process.*, vol. 106, p. 102847, Nov. 2020. (DOI: 10.1016/j.dsp.2020.102847)

[4] F. Zhao, X. Hao, and H. Chen, "Direction-of-arrival estimation of virtual array signals based on doppler effect," *Int. J. Dist. Sen. Net.*, vol. 2015, no. 10, pp. 1-10, Jan. 2015. (DOI: 10.1155/2015/264064)

[5] H. Lee and J. Chun, "Virtual array response vector for angle estimation of MIMO radar with a wide-band interleaved OFDM signal," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 25, no. 5, pp. 1539-1543, May 2021. (<https://doi.org/10.1109/LCOMM.2021.3049355>)

[6] B. Picinbono, "Second-order complex random vectors and normal distributions," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 10, pp. 2637-2640, Oct. 1996. (<https://doi.org/10.1109/78.539051>)

[7] P. Vallet and P. Loubaton, "Toeplitz rectification and DOA estimation with music," in *Proc. IEEE ICASSP*, pp. 2237-2241, Florence, Italy, May 2014. (<https://doi.org/10.1109/ICASSP.2014.6853997>)

[8] P. Vallet and P. Loubaton, "On the performance of MUSIC with Toeplitz rectification in the context of large arrays," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 65, no. 22, pp. 5848-5859, Nov. 2017. (<https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2742988>)

[9] H. Chung, Y. M. Park, and S. Kim, "Atomic norm minimization-based super-resolution DoA estimation using property of Toeplitz matrix," *J. KICS*, vol. 45, no. 9, pp. 1551-1554, Sep. 2020. (<https://doi.org/10.7840/kics.2020.45.9.1551>)

[10] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.

(<https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830>)

- [11] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, May 1989.
(<https://doi.org/10.1109/29.17564>)

최 양 호 (Yang-Ho Choi)

제47권 5호, 2022년 5월호 참조